УДК: 534.23
OECD: 01.03.AA

Определение фазовой скорости в акустических волноводах по известной групповой скорости

Осетров А.В.[1], Дроздова Л.Ф.[2*], Мышинский Э.Л.[3]
[1] Д.т.н, профессор кафедры «Алгоритмическая математика», Санкт-Петербургский Электротехнический университет (ЛЭТИ), г. Санкт-Петербург, РФ
[2] К.т.н., профессор кафедры «Экология и производственная безопасность», Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург, РФ
[3] Д.т.н., главный научный сотрудник, ФГУП «Крыловский государственный научный центр», г. Санкт-Петербург, РФ

Аннотация

Подчеркивается практическая важность изучения свойств акустических волноводов, в которых могут распространяться различные виды волн (нормальные, поверхностные и т.п.), и, в частности, определения фазовой и групповой скоростей акустических волн. Отмечается, что измерение фазовой и групповой скоростей основано на разных методах измерений и не всегда одинаково доступно. В связи с этим является актуальной задача нахождения фазовой скорости по известной групповой скорости. Представлены соотношения, связывающие фазовую и групповую скорости акустических волн при наличии дисперсии. Получены выражения фазовой и групповой скоростей в этом диапазоне и фазовой скорости на одной из границ диапазона. Анализируются особенности и ограничения представленных соотношений.

Ключевые слова: акустические волноводы, акустические волны, фазовая скорость, групповая скорость.

Anisotropy accounting for inhomogeneous modes of surface acoustic waves

Osetrov A.V.[1], Drozdova L.F.[2], Myshinsky E.L.[3]*
[1] *DSc, professor of the department of Algorithmic Mathematics, Saint Petersburg Electrotechnical University LETI, St. Petersburg, Russia*
[2] *PhD, professor of the department of Ecology and Industrial Safety, Baltic State Technical University 'VOENMEH' named after D. F. Ustinov, St. Petersburg, Russia*
[3] *DSc, chief researcher, Federal State Unitary Enterprise 'State Scientific Center Krylovsky', St. Petersburg, Russia*

Abstract

The practical importance of studying the properties of acoustic waveguides, in which various types of waves (normal, surface, etc.) can propagate, and, in particular, determining the phase and group velocities of acoustic waves, have been emphasized. It has been noted that the measurement of phase and group velocities is based on different measurement methods and is not always equally available. In this regard, the problem of finding the phase velocity from the known group velocity is important. Relationships connecting the phase and group velocities of acoustic waves in the presence of dispersion have been presented. Expressions have been obtained that make it possible to determine the phase velocity in a certain frequency range from the known group velocity in this range and the phase velocity at one of the boundaries of the range. The features and limitations of the presented relationships have been analyzed.

Keywords: *acoustical waveguides, acoustical waves, phase velocity, group velocity.*

*E-mail: drozdovalf@yandex.ru (Дроздова Л.Ф.)

Введение

Акустические волноводы имеют большое значение во многих областях техники[1-3]. Пример волноводов это мелкое море, вдоль дна которого распространяется нормальная акустическая волна; пластина, совершающая изгибные колебания при распространении упругой волны вдоль ее границы, пьезоэлектрическая подложка с нанесенными на нем слоями, вдоль поверхности которой могут распространяться различные типы поверхностных волн. Особенностью всех этих волн является наличие дисперсии, при которой скорость распространения волны зависит от частоты (или от характерных волновых размеров волновода, например, волновой толщины слоя). Кроме того, присутствует различная частотная зависимость для фазовой скорости (скорости перемещения волнового фронта) и групповой скорости (которую можно считать скоростью распространения акустической энергии). Фазовая и групповая скорости связаны между собой, о чем подробнее говорится в первом разделе статьи. Однако, если вычисление групповой скорости по известной фазовой можно считать широко известной операцией, обратная ей операция, т.е. определение фазовой скорости по групповой, практически не изучена, хотя имеет ряд практических приложений.

Известно, что фазовая скорость строго связана с материальными константами и ее измерение часто используется для определения свойств материалов[1, 4]. Вместе с тем измерение фазовой скорости может являться нетривиальной задачей, например, в системах с малыми размерами, когда акустические волноводы используются в средствах микроэлектроники, а создаются с использованием тех же технологий, что и микросхемы (напылением, травлением и т.п.). Фазовые измерения при распространении акустических волн здесь возможны с использованием дорогостоящей аппаратуры акустической микроскопии[5], а поверхность для выполнения микроскопии не всегда технологически доступна. Измерение времени в таких системах, наоборот, является классической задачей, решаемой с использованием стандартных средств измерений. Учитывая, что по времени распространения сигнала можно определить групповую скорость, а для нахождения параметров материалов нужна фазовая скорость становится понятна актуальность рассматриваемой в статье задачи определения фазовой скорости по групповой.

1. Основные соотношения между фазовой и групповой скоростью

Будем рассматривать в качестве исходных следующие определения [1] фазовой v_{ph} и групповой v_{gr} скоростей.

$$v_{ph} = \omega/k, \tag{1}$$

$$v_{gr} = \partial\omega/\partial k, \tag{2}$$

где ω – круговая частота, k – волновое число.

Найдем зависимость между групповой и фазовой скоростями, перейдя для упрощения выражений от скоростей v_{ph} и v_{gr} к медленностям s_{ph} и s_{gr}, т.е. представив $v_{ph} = 1/s_{ph}$ и $v_{gr} = 1/s_{gr}$. Тогда после последовательной подстановки (2) в (1) получаем $s_{gr} = \partial k/\partial\omega = \partial(\omega s_{ph})/\partial\omega = s_{ph} + \omega\partial s_{ph}/\partial\omega$. Если, в последнем выражении в качестве независимого параметра выбрать частоту $f = \omega/2\pi$, то приходим к окончательному выражению:

$$s_{gr} = s_{ph} + f\frac{\partial s_{ph}}{\partial f}. \tag{3}$$

При решении задачи определения s_{gr} по s_{ph} выражение (3) потребует нахождения производной от кривой медленности фазовой скорости, что является стандартной задачей численного дифференцирования, если фазовая скорость является результатом измерений или численных вычислений. Заметим, что если в выражении (3) перейти к скоростям, как более привычным параметрам, можно получить следующее наиболее часто используемое выражение [6]:

$$v_{gr} = \frac{v_{ph}}{1 - a_v}, \tag{4}$$

где:

$$a_v = \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial v_{ph}}{\partial f / f}. \tag{5}$$

Численный алгоритм нахождения a_v представлен в [6] и в данной публикации мы не будем на нем подробно останавливаться.

Перейдем ко второй задаче определения s_{ph} по s_{gr}, в этом случае выражение (3) удобнее записывать в виде:

$$\frac{\partial s_{ph}}{\partial f} + \frac{1}{f} s_{ph} = \frac{s_{gr}}{f}. \tag{6}$$

Заметим, что выражение (6) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого можно получить аналитически. Действительно, соответствующее выражению (6) однородное уравнение $\partial \hat{s}_{ph}/\partial f + \hat{s}_{ph}/f = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными, так как $\partial \hat{s}_{ph}/\hat{s}_{ph} = -\partial f/f$. Почленно интегрируя, получаем: $\ln \hat{s}_{ph} = -\ln f + \ln c$ или $\hat{s}_{ph} = c/f$, где $c = const$. Решение неоднородного уравнения (6) ищем в виде:

$$s_{ph} = c(f)/f, \tag{7}$$

заменяя константу, полученную при решении однородного уравнения, на функцию частоты. Подстановка выражения (7) в уравнение (6) приводит к соотношению $\partial c(f)/\partial f = s_{gr}$ или

$$c(f) = \int s_{gr}(f) df. \tag{8}$$

Окончательная подстановка выражения (8) в выражение (7) приводит к следующей формуле:

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{1}{f} \int \frac{df}{v_{gr}}. \tag{9}$$

В отличие от выражения (4), позволяющего найти групповую скорость по фазовой, обратная задача нахождения фазовой скорости по групповой, описываемая выражением (9), не является тривиальной из-за наличия произвольной постоянной, которая появляется при неопределенном интегрировании в выражении (9). Более подробно способ использования уравнения (9) рассматривается в следующем разделе.

2. Определение фазовой скорости при наличии реперной точки

Рассмотрим способы использования, полученного в предыдущем разделе, выражения (9) при наличии точки на оси частот, в которой известна фазовая скорость. Будем в качестве дисперсионной среды выбирать некоторый слой толщины h, для которого как групповая, так и фазовая скорость являются функцией fh, и групповая скорость считается известной в некотором диапазоне $[fh_1,fh_2]$. Ставится задача определения фазовой скорости.

Вначале рассмотрим случай, когда фазовая скорость известна в нижней точке диапазона $[fh_1,fh_2]$. Переходя в выражении (9) от неопределенного к определенному интегралу, запишем:

$$\frac{1}{v_{ph}(fh)} = \frac{1}{fh}\left(\int_{fh_1}^{fh} \frac{d(fh)}{v_{gr}(fh)} + c_0\right). \tag{10}$$

Если в выражение (10) поставить значение $fh = fh_1$, то интеграл обратится в нуль, и можно найти выражение для постоянного коэффициента, $c_0 = fh_1/v_{ph}(fh_1)$. После подстановки последнего выражения в уравнение (10) окончательно получаем:

$$\frac{1}{v_{ph}(fh)} = \frac{1}{fh}\left(\int_{fh_1}^{fh} \frac{d(fh)}{v_{gr}(fh)} + \frac{fh_1}{v_{ph}(fh_1)}\right). \tag{11}$$

Выражение (11) позволяет определить фазовую скорость в некотором диапазоне, если в этом диапазоне известна групповая скорость $v_{gr}(fh)$ и известна фазовая скорость $v_{ph}(fh_1)$ на нижней границе диапазона.

Выражение, аналогичное (11) может быть получено и в случае выбора в качестве реперной точки верхней границы диапазона $[fh_1,fh_2]$. Задавая в качестве нижнего предела интеграла в уравнении (10) значение fh_2 и выполняя преобразования, аналогичные описанным ранее, приходим к соотношению:

$$\frac{1}{v_{ph}(fh)} = \frac{1}{fh}\left(\frac{fh_2}{v_{ph}(fh_2)} - \int_{fh}^{fh_2} \frac{d(fh)}{v_{gr}(fh)}\right). \tag{12}$$

Выражения (11) и (12) можно считать расчетными соотношениями для определения фазовой скорости по групповой. Вопрос нахождения значения фазовой скорости на одной из границ рассматриваемого интервала зачастую может быть решен, исходя из физической природы рассматриваемого волновода. Например, из теории распространения волн часто следует, что при больших fh групповая и фазовая скорости стремятся друг к другу. Тогда выражение (12) можно использовать, заменив в его правой стороне фазовую скорость на групповую, конечно, если считать fh_2 достаточно большим. Иногда, наоборот, удобнее использовать низкочастотное приближение, например, предполагая фазовую скорость достаточно большой при приближении к критической частоте, тогда в выражении (11) в правой части второе слагаемое обращается в нуль.

Еще один важный аспект использования выражений (11)-(12) для нахождения фазовой скорости заключается в необходимости знания групповой скорости на интервале, а не только в районе какой-то локальной точки по частоте, как это возможно в задаче поиска групповой скорости по формулам (4)-(5). С математической точки зрения это может привести к накоплению ошибок измерений, если присутствует систематическая ошибка одного знака на всем частотном диапазоне измеряемых данных. Хотя процедуру определения фазовой скорости по групповой можно считать менее точной и более численно и технически сложной чем обратную процедуру, она может найти применение в тех случаях, когда другие пути оценки фазовой скорости технически сложны или затруднены, а получение хотя бы оценочных данных по фазовой скорости является актуальной задачей.

Заключение

Проведенная математическая оценка связи фазовой и групповой скоростями позволила найти расчетные соотношения для вычисления фазовой скорости при измерении групповой в диапазоне $[fh_1, fh_2]$ и при одновременно известной фазовой скорости либо на нижней границе диапазона $fh = fh_1$ (формула (11)), либо на верхней границе диапазона $fh = fh_2$ (формула(12)). Особенно важным является наличие такой возможности расчета фазовой скорости, когда не всегда технически возможно её измерение в системах с малыми размерами акустических волноводов, например, в средствах микроэлектроники. Коме того, в некоторых случаях возможно исключить знание фазовой скорости, если воспользоваться одним из физических приближений (бесконечности фазовой скорости в критической частоте и ее равенству групповой на больших частотах).

Список литературы

1. Royer D., Dieulesaint. Elastic waves in solids, V.1, pp.1-374, V2. pp.1-446. Springer, 2000.

2. Ken-ya Hashimoto. Surface Acoustic Wave Devices in Telecommunications // Springer, 2000, pp.1-330.

3. Галисултанов А.Т., Осетров А.В. Распространение поверхностной акустической волны в многослойной диэлектрической структуре с металлизацией на интерфейсе // Известия СПбГЭТУ "ЛЭТИ" - 2013. - №3, с.79-86.

4. Осетров А.В., Нгуен В.Ш. Расчет параметров поверхностных акустических волн в пьезоэлектриках методом конечных элементов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4. – № 4. – с. 71-80.

5. Modern acoustical techniques for the measurement of mechanical properties // Edited by Moises Levy, Henry E. Bass, Richard Stern., Academic Press, 2001, pp. 1-434.

6. Osetrov A.V., Drozdova L.F., Mzshinsky E.L. Thermal models for SAW calculations in the layered systems // Akustika - 2019. Vol.32 - pp. 83-87.

References

1. Royer D., Dieulesaint. Elastic waves in solids, V.1, pp.1-374, V2. pp.1-446. Springer, 2000.

2. Ken-ya Hashimoto. Surface Acoustic Wave Devices in Telecommunications // Springer, 2000, pp.1-330.

3. Galisultanov A.T., Osetrov A.V. Rasprostranenie poverhnostnoj akusticheskoj volny v mnogoslojnoj dielektricheskoj strukture s metallizaciej na interfejse // Izvestiya SPbGETU "LETI" - 2013. - №3, pp.79-86.

4. Osetrov A.V., Nguen V.SH. Raschet parametrov poverhnostnyh akusticheskih voln v p'ezoelektrikah metodom konechnyh elementov // Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred. – 2011. – V. 4. – № 4. – pp. 71-80.

5. Modern acoustical techniques for the measurement of mechanical properties // Edited by Moises Levy, Henry E. Bass, Richard Stern., Academic Press, 2001, pp. 1-434

6. Osetrov A.V., Drozdova L.F., Mzshinsky E.L. Thermal models for SAW calculations in the layered systems // Akustika - 2019. Vol.32 - pp. 83-87.