

УДК: 534.138
OECD: 01.03.AA

Ячеечные модели суспензий сферических частиц при разных граничных условиях

Казаков Л.И.^{1*}

¹ К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН, г. Владивосток

Аннотация

Приведены акустические характеристики ячейчных моделей монодисперсных суспензий сферических частиц произвольных концентраций для четырех чаще всего используемых граничных условий на поверхности ячейки. Сравнение расчетных и известных экспериментальных данных показало, что наилучшее их совпадение во всех случаях наблюдается при окружении ячейки тонкой невесомой жесткой оболочкой. Такое граничное условие обеспечивает минимум вязкой диссипации звуковой энергии при малых и умеренных значениях отношения диаметра частиц к глубине проникновения вязкой волны в жидкость. При больших значениях этого параметра вязкие потери минимальны при граничном условии Хаппеля и максимальны при жестких оболочках.

Ключевые слова: ячейчные модели суспензий, сферические частицы, граничные условия, вязкие потери, минимум диссипации энергии.

Cellular models of spherical particle suspensions under different boundary conditions

Kazakov L.I.^{1}*

¹ *K. F.-M. N., leading researcher, Pacific Oceanological Institute named after V. I. Il'ichev FEB RAS, Vladivostok 9*

Abstract

Acoustic characteristics of cell models of monodisperse suspensions of spherical particles of arbitrary concentrations for the four most commonly used boundary conditions on the cell surface are presented. Comparison of calculated and known experimental data showed that the best coincidence in all cases is observed when the cell is surrounded by a thin weightless rigid shell. This boundary condition provides a minimum viscous dissipation of sound energy at small and moderate values of the ratio of the particle diameter to the depth of penetration of the viscous wave into the liquid. At high values of this parameter, viscous losses are minimal under the Happel boundary condition and maximal under rigid shells.

Keywords: *cellular models of suspensions, spherical particles, boundary conditions, viscous losses, the minimum energy dissipation.*

Введение

Достоинство ячеечных моделей – возможность их применения для исследования свойств дисперсных сред произвольных концентраций. Но они имеют три существенных недостатка: 1) применимость лишь к монодисперсным средам, когда все включения одинаковы по размерам (радиуса R), форме и свойствам; 2) упорядоченность структуры, приводящая иногда к появлению нежелательных резонансов внутри ячейки при гармонических колебаниях; 3) неопределенность требуемых условий на границе ячейки, поскольку механизм гидродинамического взаимодействия включений не вполне ясен и неизвестно как задать эти условия.

В литературе использовались разные граничные условия на поверхности ячейки, основанные на эвристических соображениях (каждому условию ниже присвоен номер n):

1. $n = 0$: жесткая оболочка ячейки, бесконечно тонкая и легкая [1, с. 152, 518];
2. $n = 1$: условие Квашнина $\partial V_{\Theta} / \partial r = 0$, т.е. минимум тангенциальной скорости по радиальной координате [2, с.154]; по-видимому, это условие выполняется, по крайней мере, в 12 точках сферической поверхности ячейки – там, где она соприкасается с ближайшими соседними ячейками (при гексагональной плотнейшей упаковке последних);
3. $n = 2$: условие Хаппеля, состоящее в требовании, чтобы на границе ячейки обращались в нуль касательные напряжения $\sigma_{\Theta r}(R_1, \Theta) = 0$ [1, с. 447], [3], где R_1 – радиус ячейки;
4. $n = 3$: условие Кувабары постулирует отсутствие завихренности течения на границе ячейки $\text{rot} \mathbf{V}(R_1, \Theta) = 0$ [1, с. 450], [4].

1. Акустические характеристики суспензий

Ячеечные модели эмульсий сферических и цилиндрических капель для гармонических колебаний при четырех вариантах указанных граничных условий на поверхности ячейки изучены в работах [5] и [6]. Но там получены лишь низко- и высокочастотные приближения. В работе [7] представлены полные выражения акустических характеристик ячеечной модели эмульсии с жесткими оболочками ячеек ($n = 0$). В данной статье приведены полные выражения для еще трех вариантов суспензий ($n = 1, 2, 3$).

Если длина звуковой волны в ячеечной дисперсной среде намного превышает размер ячейки, то такую среду считают «микронеоднородной» с эффективными параметрами – плотностью $\tilde{\rho}$ (кг/м³), сжимаемостью \tilde{k} (Па⁻¹), скоростью звука \tilde{c} (м/с) и другими [8, с. 56,57]. Поскольку при распространении звука в дисперсной среде неизбежны вязкие и тепловые потери, то её параметры суть комплексные частотнозависимые величины:

$$\tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\rho}_1(\omega) + i\tilde{\rho}_2(\omega), \quad (1)$$

$$\tilde{k}(\omega) = \tilde{k}_1(\omega) + i\tilde{k}_2(\omega), \quad (2)$$

причем их действительные и мнимые части однозначно связаны дисперсионными соотношениями типа Крамерса-Кронига, выражающими принцип причинности [6, с. 65], [9]. Комплексная скорость звука в среде [8, с. 28] $\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}}}$, (м/с), волновое

число гармонической звуковой волны $\tilde{k} = \frac{\omega}{\tilde{c}} = \omega\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}}$, (м⁻¹), где ω – круговая частота колебаний. Зависимость переменных от времени t определим множителем $e^{-i\omega t}$, например,

$U(t) = Ue^{-i\omega t}$, где U (м/с) – комплексная амплитуда колебательной скорости частицы.

Обычно считают малым относительное убывание за счет поглощения амплитуды звукового давления на длине волны [10, с. 424]. Это означает, что $\tilde{k}_2 \ll \tilde{k}_1$, $\tilde{\rho}_2 \ll \tilde{\rho}_1$. В таком случае имеют место приближения:

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \tilde{\kappa}_1(\omega) + i\tilde{\kappa}_2(\omega) \approx \frac{\omega}{\tilde{c}_\Phi(\omega)} + i\tilde{\kappa}_2(\omega), \text{ м}^{-1},$$

где

$$\tilde{c}_\Phi(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_1(\omega)\tilde{\rho}_1(\omega)}}, \text{ м/с} -$$

фазовая скорость звука в суспензии;

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) \approx \frac{\omega}{2\tilde{c}_\Phi(\omega)} \left(\frac{\tilde{k}_2(\omega)}{\tilde{k}_1(\omega)} + \frac{\tilde{\rho}_2(\omega)}{\tilde{\rho}_1(\omega)} \right), \text{ м}^{-1} - \quad (3)$$

амплитудный коэффициент поглощения звука в множителе $e^{-\tilde{\kappa}_2(\omega)x}$, характеризующем убывание амплитуды колебаний с расстоянием x .

В (3) первое слагаемое в скобках определяет тепловые потери, второе – вязкие. Ниже изучим только вязкие потери, считая, что дисперсия сжимаемостей фаз и, соответственно, тепловые потери отсутствуют, т.е. эффективная сжимаемость $\tilde{k}(\omega)$ (2) является вещественной постоянной величиной [8, с. 57]:

$$\tilde{k} = k'\xi^3 + k(1 - \xi^3),$$

где k' (Па⁻¹) – сжимаемость частицы, k (Па⁻¹) – сжимаемость вмещающей вязкой жидкости, $\xi = R/R_1$, $\xi^3 = \varepsilon$ – объемная концентрация включений в суспензии. Если необходимо учесть тепловые потери, следует использовать результаты работы [11]. Они кратко изложены в [7].

Комплексная плотность (1) получена в работах [6], [7]:

$$\tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\rho}_1(\omega) + i\tilde{\rho}_2(\omega) = \rho + (\rho' - \rho)\xi^3 \frac{U}{V}, \text{ кг/м}^3, \quad (4)$$

где ρ – плотность жидкости, ρ' – плотность включения, V (м/с) – амплитуда скорости полюсов ячейки. Эта формула выведена для несжимаемой жидкости, каковой её и следует считать в малой относительно длины звуковой волны ячейке суспензии.

Таким образом, согласно (4), все определяет отношение скоростей фаз, а они разные при разных плотностях. За счет этой разности и происходят вязкие звуковые потери. Для одиночной частицы отношение скоростей дает известная формула Кёнига (W.König, 1891г.), являющаяся основой всех акустических теорий вязких потерь в малоконцентрированных суспензиях:

$$\frac{U}{V} = \frac{1 + \frac{3}{\alpha} + i \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2} \right)}{\frac{1}{\gamma} + \frac{3}{\alpha} + i \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2} \right)}, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\eta}} \cdot 2R = \frac{2R}{\delta_{\text{вязк}}}, \quad (6)$$

η (Па·с) – динамическая вязкость жидкости, $\delta_{\text{вязк}} = (2\eta/\omega\rho)^{1/2}$ (м) – глубина проникновения вязкой волны в жидкость [10, с. 123],

$$\gamma = \frac{3\rho}{2\rho' + \rho}. \quad (7)$$

Полные выражения для отношения скоростей представим в виде:

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{1 - iq_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

где q_n – свое для каждого граничного условия точное выражение.

1.1. Жесткая оболочка ячейки, $n = 0$:

[7], здесь приведено для сравнений:

$$q_0 = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{-2z\xi + z(1 + \xi^2)ch[z(1 - \xi)] - \left[1 - \xi + \frac{z^2}{3}(1 - \xi^3)\right] sh[z(1 - \xi)]}{\left[z(1 - \xi) - \frac{z^3}{3}\xi(1 - \xi)\right] ch[z(1 - \xi)] - \left[1 + \frac{z^2}{3}(1 - 3\xi + \xi^2) + \frac{z^4}{9}\xi^2\right] sh[z(1 - \xi)]},$$

где

$$z = i^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha}{\sqrt{2\xi}}. \quad (8)$$

Используя разложения для ch и sh и сократив числитель и знаменатель на z^5 , получим альтернативное представление:

$$q_0 = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \phi'_{0m}(\xi)[z(1 - \xi)]^{2m}}{\sum_{m=0}^{\infty} \Psi'_{0m}(\xi)[z(1 - \xi)]^{2m}},$$

где

$$\phi'_{0m}(\xi) = \frac{5!(m+1)(m+2)}{2(2m+5)!} (1 - \xi)^4 \left(1 + \frac{2m+7}{2m+4}\xi + \xi^2\right),$$

$$\Psi'_{0m}(\xi) = \frac{5!(m+1)(m+2)}{2(2m+5)!} \left[(1 - \xi^5) + 2m\xi(1 - \xi^3) + \frac{m}{3}(4m - 2)\xi^2(1 - \xi)\right].$$

1.2. Условие Квашнина, $n = 1$:

$$q_1 = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{-2z\xi + \left[z(1 - \xi + 2\xi^2) + \frac{z^3}{3}(1 - \xi^3)\right] ch[z(1 - \xi)] - \dots}{\left[z(1 - \xi) + \frac{z^3}{3}(1 - \xi)^2 + \frac{z^5}{9}\xi^2\right] ch[z(1 - \xi)] - \dots} \dots$$

$$\dots \frac{- \left[1 - 2\xi + \frac{z^2}{3}(2 + 3\xi^2 - 2\xi^3)\right] sh[z(1 - \xi)]}{- \left[1 + \frac{z^2}{3}(2 - 3\xi + \xi^2) - \frac{z^4}{9}\xi(3 - 2\xi)\right] sh[z(1 - \xi)]}$$

$$q_1 = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \phi'_{1m}(\xi)[z(1-\xi)]^{2m}}{\sum_{m=0}^{\infty} \Psi'_{1m}(\xi)[z(1-\xi)]^{2m}},$$

где

$$\phi'_{1m} = \frac{(1-\xi)^3}{(2m+5)!} \left\{ (1-\xi)[(m+2)(1-\xi+2\xi^2)+\xi] + \frac{(m+2)(2m+5)}{3} [(2m+1+2\xi)(1+\xi+\xi^2) - 3\xi^2] \right\},$$

$$\Psi'_{1m}(\xi) = \frac{(m+2)}{(2m+5)!} \left\{ (1-\xi)^5 + \frac{2m+5}{3}(2m+1+\xi)(1-\xi)^4 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(2m+2)(2m+3)(2m+5)}{9} \xi [(2m+1)\xi + (1-\xi)(3-2\xi)] \right\}.$$

1.3. Условие Хаппеля, $n = 2$:

$$q_2 = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{-2z\xi + \left[z \left(1 - \frac{\xi}{2} + \frac{3}{2}\xi^2 \right) + \frac{z^3}{6}(1-\xi^3) \right] ch[z(1-\xi)] - \dots}{\left[z(1-\xi) + \frac{z^3}{6}(1-3\xi+2\xi^2) + \frac{z^5}{18}\xi^2 \right] ch[z(1-\xi)] - \dots} \dots \\ \frac{- \left[1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{z^2}{2}(1+\xi^2-\xi^3) \right] sh[z(1-\xi)]}{- \left[1 + \frac{z^2}{6}(3-6\xi+2\xi^2) - \frac{z^4}{6}\xi(1-\xi) \right] sh[z(1-\xi)]}; \\ q_2 = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \phi'_{2m}(\xi)[z(1-\xi)]^{2m}}{\sum_{m=0}^{\infty} \Psi'_{2m}(\xi)[z(1-\xi)]^{2m}},$$

где

$$\phi'_{2m} = \frac{(1-\xi)^3}{(2m+5)!} \left\{ (1-\xi) \left[(m+2) \left(1 - \frac{\xi}{2} + \frac{3}{2}\xi^2 \right) + \xi \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(m+2)(2m+5)}{6} [(2m+3\xi)(1+\xi+\xi^2) - 3\xi^2] \right\},$$

$$\Psi'_{2m}(\xi) = \frac{(m+2)}{(2m+5)!} \left\{ (1-\xi)^5 + \frac{2m+5}{6} [(2m+3)(1-2\xi) - 3 + 6\xi - 2\xi^2] (1-\xi)^3 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(m+1)(2m+3)(2m+5)}{9} \xi [(2m+1)\xi + 3(1-\xi)^2] \right\}.$$

1.4. Условие Кувабары, $n = 3$:

$$q_3 = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{3}{z^2} \frac{\left[-z\xi(1 - \xi) + \frac{z^3}{3}(1 - \xi^3) \right] ch[z(1 - \xi)] - \left[-\xi + \frac{z^2}{3}(1 + 3\xi^2 - \xi^3) \right] sh[z(1 - \xi)]}{\left[z(1 - \xi) + \frac{z^3}{3}\xi^2 \right] ch[z(1 - \xi)] - \left[1 + \frac{z^2}{3}\xi(\xi - 3) \right] sh[z(1 - \xi)]};$$

$$q_3 = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \phi'_{3m}(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m}}{\sum_{m=0}^{\infty} \Psi'_{3m}(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m}},$$

$$\phi'_{3m} = \frac{3(m+2)(1-\xi)^3}{(2m+5)!} \left[-\xi(1-\xi)^2 + \frac{(2m+3)(2m+5)}{3}(1+\xi+\xi^2) - \frac{(2m+5)}{3}(1+3\xi^2-\xi^3) \right],$$

$$\Psi'_{3m}(\xi) = \frac{(m+1)}{(2m+3)!} \left[(1-\xi)^3 + \frac{(2m+1)(2m+3)}{3}\xi^2 - \frac{(2m+3)}{3}\xi(\xi-3)(1-\xi) \right].$$

При $\xi \rightarrow 1$ все значения $q_n \rightarrow 0$, т.е. $U/V \rightarrow 1$, как это и должно быть. При $\xi \rightarrow 0$ по (8) значение $z \rightarrow \infty$, $th[z(1 - \xi)] \rightarrow -1$, что во всех четырех случаях приводит к формуле Кёнига (5) для U/V .

2. Сравнения с экспериментами

Из рассматриваемых четырех вариантов граничных условий физически состоятельны два – жесткая оболочка и условие Хаппеля. Последнее, в принципе, может быть реализовано окружением ячейки тонким слоем идеальной жидкости.

Для стационарного течения принцип минимума вязких потерь в ячейке эмульсии работы [7] диктует необходимость окружения ячейки жесткой оболочкой. Доказательство следующее. Решаем стационарную задачу, как это сделано в книге [12, с. 397...], но с учетом внешней силы F , действующей на единицу массы жидкости (чего в [12] нет). Коль скоро радиальная скорость ищется в виде $v_r = f(r) \cos \Theta$, то известно лишь одно граничное условие на поверхности ячейки: $f(R_1) = V - U$, где V – заданная скорость полюсов ячейки, U – скорость капли, которую надо найти. Как задать здесь $v_\Theta = \varphi(r) \sin \Theta$ неизвестно. Записав все граничные условия задачи, получим систему из семи уравнений относительно восьми неизвестных: 6 искомых коэффициентов скоростей, плюс U , плюс V_0 – скорость жидкостей на экваторе капли.

Используя известное выражение для диссипации энергии в несжимаемой вязкой жидкости [12, с. 16], найдем энергию, диссипируемую в ячейке в единицу времени

$$W = -\frac{2\pi\eta}{3} \left\{ \int_R^{R_1} r^2 \left[\frac{d(f - 2\varphi)}{dr} \right]^2 dr - 8R_1 [f(R_1) + \varphi(R_1)]^2 + \frac{2\eta + 3\eta'}{2\eta} 8R [f(R) + \varphi(R)]^2 \right\}, \quad (9)$$

где

$$f(r) = \frac{\beta_1}{r^3} + \frac{\beta_2}{r} + \beta_3 + a_1 r^2, \quad \varphi(r) = \frac{\beta_1}{2r^3} - \frac{\beta_2}{2r} - \beta_3 - 2a_1 r^2.$$

Отсюда видно, что W зависит лишь от трех постоянных β_1 , β_2 и a_1 , одна из которых (a_1) остается неизвестной. Подставив в (9) найденные значения β_1 и β_2 , получим зависимость W только от этой неизвестной постоянной. Значение последней найдем, минимизируя W , т.е. из необходимого условия минимума $\frac{\partial W}{\partial a_1} = 0$. Убедимся также в выполнении достаточного условия минимума $\frac{\partial^2(-W)}{\partial a_1^2} > 0$. Далее из предыдущего уравнения определим критическое значение a_1 . Подставив его в найденные формулы для U и V_0 , обнаружим, что в них на свои места водворились функции $\varphi_{00}(\xi)$, $\Psi_{00}(\xi)$, $\varphi'_{00}(\xi)$, $\Psi'_{00}(\xi)$, характерные для ячеек эмульсии с жесткими оболочками.

Таким образом, для любого стационарного течения доказана необходимость наличия жесткой оболочки для выполнения принципа минимума вязких потерь. Достаточность обеспечена вариационным принципом Гельмгольца [13, с. 415].

Видимо, все это справедливо и для квазистационарного случая, т.е. для достаточно низкочастотного звука (аналогичные результаты получены также для ячейочной модели с цилиндрическими каплями [14]).

Вместе с тем, приведенные ниже расчеты показали, что при жестких оболочках ячеек суспензии потери минимальны в очень широком диапазоне частот, а не только на низких частотах. Также выяснилось, что вязкие потери могут быть минимальными и при выполнении условия Хаппеля ($n = 2$). Критерием осуществления того или иного варианта служит отношение

$$s_2 = \frac{\tilde{\kappa}_{02}}{\tilde{\kappa}_{22}} = \frac{\operatorname{Im} \frac{1}{1 - iq_0}}{\operatorname{Im} \frac{1}{1 - iq_2}} \sqrt{\frac{1 + \zeta \xi^3 \operatorname{Re} \frac{1}{1 - iq_2}}{1 + \zeta \xi^3 \operatorname{Re} \frac{1}{1 - iq_0}}}, \quad (10)$$

где $\zeta = \rho'/\rho - 1$; s_n , $\tilde{\kappa}_{n2}$, q_n суть функции трех аргументов: ζ , ξ , α , причем определяющим фактором является не частота, а значение α (6). При $\alpha \ll 1$ и $\alpha \sim 1$ $s_n < 1$, т.е. потери минимальны при жесткой оболочке ($n = 0$); в этом случае независимо от значений ζ имеем: $s_{1,2,3} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 1$, $s_{1,2,3} \xrightarrow{\xi \rightarrow 1} 0,25$ т.е. превышение потерь над случаем $n = 0$ доходит до 4 раз. При больших значениях α $s_n > 1$ и потери минимальны при $n = 2$, причем $s_{1,2,3} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 1 + \xi^4$ для любых значений ζ . Ниже приведены примеры обоих вариантов.

Далее на рисунках крупными точками (●) обозначены экспериментальные результаты. Соответствие расчетных кривых граничным условиям следующее: — жесткая оболочка ($n = 0$); \cdots — условие Квашнина ($n = 1$); — — — условие Хаппеля ($n = 2$); - · - · - условие Кувабары ($n = 3$).

На рис. 1 показаны результаты измерений Хемптоном (Hampton, 1967) [15] затухания $A(\varepsilon) = 8,686\tilde{\kappa}_2(\varepsilon)$ звука частотой 100 кГц в полидисперсной суспензии частиц каолинита в воде в зависимости от объемной концентрации частиц ε . Параметры суспензии: плотность частиц $\rho' = 2,71 \cdot 10^3$ кг/м³, их сжимаемость $k' = 10^{-11}$ Па⁻¹; плотность воды $\rho = 0,9982 \cdot 10^3$ кг/м³, вязкость $\eta = 1,004 \cdot 10^{-3}$ Па·с, сжимаемость $k = 4,557 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹, скорость звука $c = 1482,7$ м/с; средний размер частиц $2R = 2,50 \cdot 10^{-6}$ м = 2,5 мкм; $\alpha = 1,397$; $\zeta = 1,715$. Приведены также расчетные кривые затухания $A_n(\varepsilon)$. Видно, что для теоретического объяснения экспериментальных данных подходит только нижняя кривая ($n = 0$), дающая наименьшие из четырех вариантов вязкие звуковые потери.

На рис. 2 представлены результаты измерений Уриком (Urick, 1948) [16] затухания звука частотой 1,0 МГц в полидисперсной суспензии частиц каолина в воде при разных

концентрациях частиц. Значения параметров: $\rho' = 2,71 \cdot 10^3$ кг/м³, $k' = 10^{-11}$ Па⁻¹, $\zeta = 1,715$, $\alpha = 1,635$. Средний диаметр частиц $2R = 0,925 \cdot 10^{-6}$ м = 0,925 мкм. И здесь минимальные вязкие потери описывает нижняя кривая, полученная для ячеек с жесткими оболочками и наиболее пригодная для интерпретации экспериментальных данных.

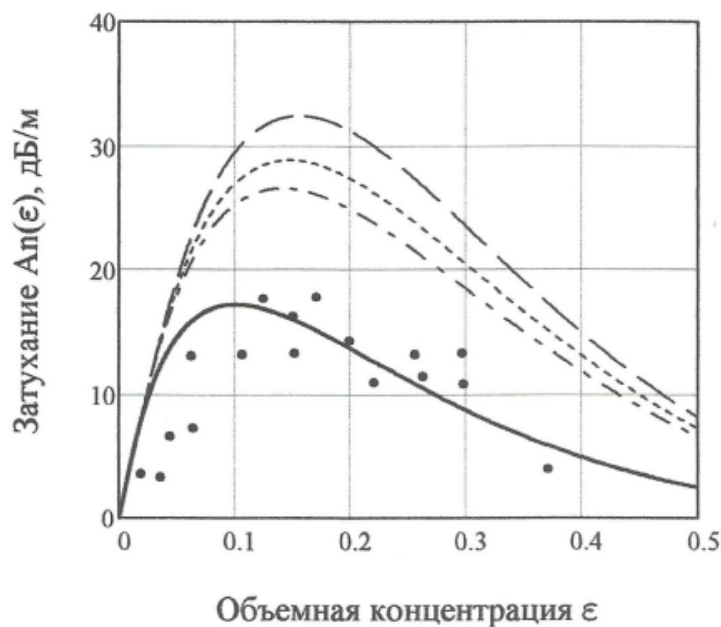


Рис. 1. Затухание звука частотой 100 кГц в полидисперсной суспензии каолинита в воде для разных объемных концентраций ϵ частиц средним диаметром $2R = 2,5$ мкм [15]

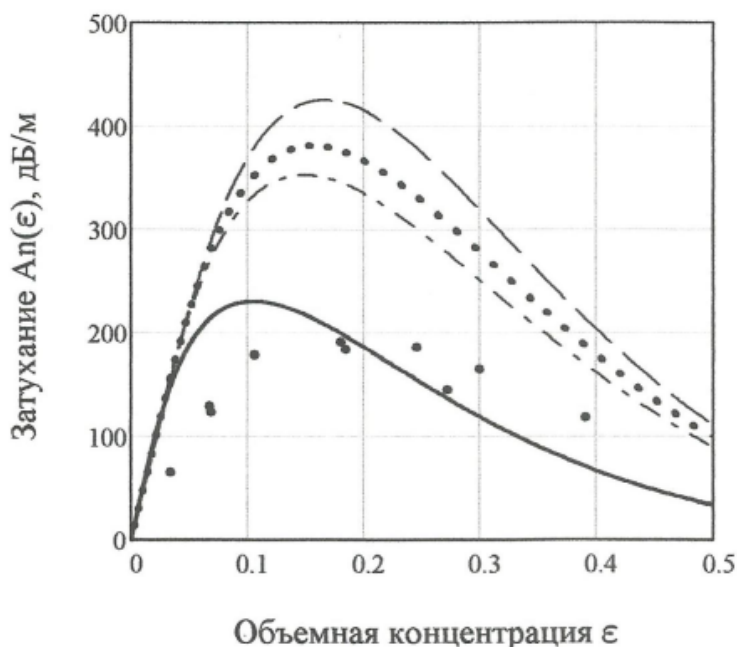


Рис. 2. Затухание звука частотой 1,0 МГц в полидисперсной суспензии каолина в воде для разных объемных концентраций ϵ частиц средним диаметром $2R = 0,925$ мкм [16]

На рисунках 1, 2 вряд ли следует рассчитывать на лучшее совпадение теоретических кривых с результатами измерений, поскольку расчетные кривые для полидисперсных суспензий получены с учетом лишь среднего размера частиц при

широком спектре их размеров, что является грубым приближением. Частицы суспензий заведомо нерегулярной формы в расчетах принимаются сферическими с радиусами, определяемыми седиментационными (т.е. стационарными) измерениями, и остается лишь надеяться, что эти значения радиусов частиц применимы и к описанию вязких звуковых потерь в широком диапазоне частот [15], [16]. Кроме того, не учтены тепловые потери. Неизвестна также точность измерений – не высокая, судя по разбросу точек.

На рис. 3 приведено сравнение расчетных и измеренных в работе [17] значений звуковых потерь в суспензиях частиц рутила (TiO_2) в воде для разных объемных концентраций на частоте 10,3 МГц. Помимо вязких потерь (в дБ/(см·МГц))

$$ВП_n(\varepsilon) = \frac{8,686}{100 \cdot 10,3} \cdot \frac{\omega}{2\tilde{c}_\Phi(\omega)} \cdot \frac{\tilde{\rho}_2(\omega)}{\tilde{\rho}_1(\omega)},$$

для четырех граничных условий при расчете учтены также тепловые потери

$$ТП(\varepsilon) = \frac{8,686}{100 \cdot 10,3} \cdot \frac{\omega}{2\tilde{c}_\Phi(\omega)} \cdot \frac{\tilde{k}_2(\omega)}{\tilde{k}_1(\omega)},$$

не зависящие от гидродинамических граничных условий на поверхности ячейки. Они взяты из статьи [7], где рассчитаны по формулам, дублирующим результаты работы [11]. Параметры суспензии частиц рутила: $\rho' = 3,92 \cdot 10^3$ кг/м³, $\zeta = 2,929$. Средний размер частиц согласно [17] зависит от концентрации: $2R(\varepsilon) = (0,3 + 0,3478\varepsilon)$ мкм. Значения α – в пределах 1,70 – 2,59.

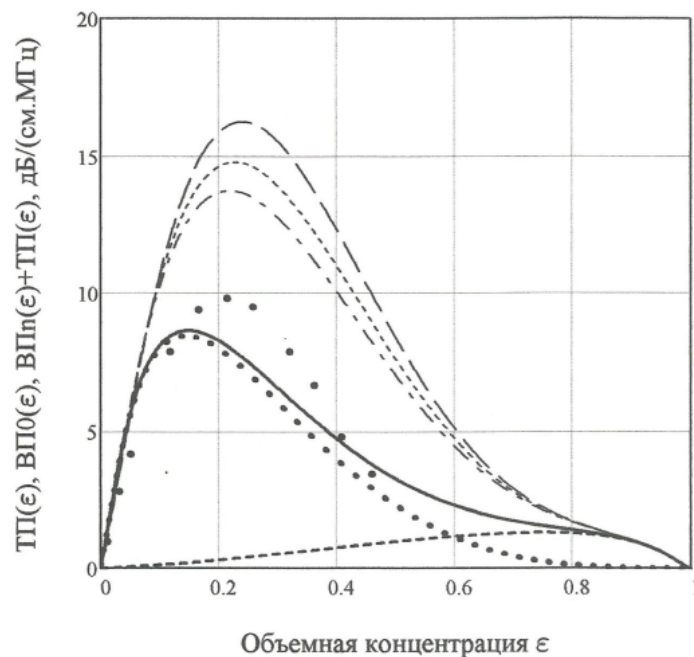


Рис. 3. Затухание звука частотой 10,3 МГц в суспензии рутила (TiO_2) в воде в зависимости от объемной концентрации ε частиц средним диаметром $2R(\varepsilon) = (0,3 + 0,3478\varepsilon)$ мкм [17]: \cdots – расчет вязких потерь $ВП_0(\varepsilon)$ для жесткой оболочки; $- - -$ – расчет тепловых потерь $ТП(\varepsilon)$.

Как и в предыдущих случаях, наилучшим приближением к экспериментальным данным служит кривая $ВП_0(\varepsilon) + ТП(\varepsilon)$, представляющая минимальные суммарные вязкие и тепловые потери в модели суспензии с жесткими оболочками ячеек. Кривые суммарных потерь для моделей с другими граничными условиями намного превышают результаты измерений.

Работа [18] содержит данные измерений в диапазоне частот 20 - 300 кГц затухания звука в воде, насыщенной с объемной концентрацией $\varepsilon = 0,635$ стеклянными бусинками среднего диаметра $2R = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,18 \text{ мм}$. Иные параметры этой суспензии: $\rho' = 2,45 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\zeta = 1,4544$, $\gamma = 0,5077$ (по (7)), $\alpha = 10,06 \cdot f_{\text{кГц}}^{1/2}$ (по (6)). На рис. 4 точками показаны (в функции от параметра α) экспериментальные данные работы [18] и нанесены расчетные кривые.

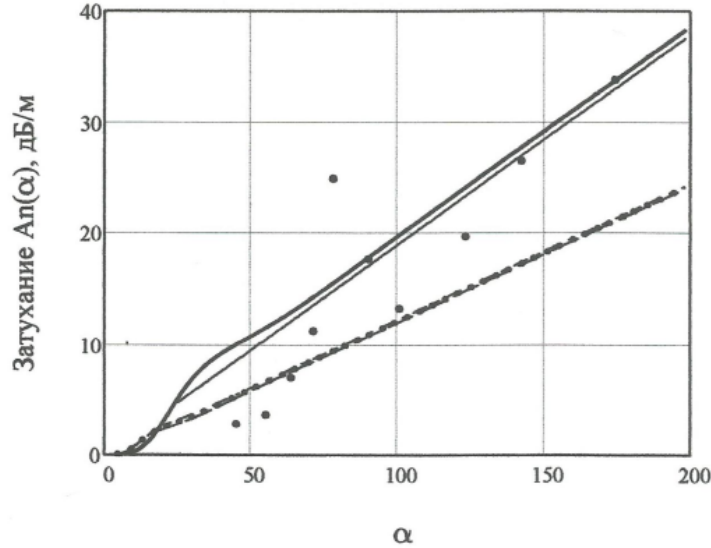


Рис. 4. Частотная зависимость затухания звука в суспензии стеклянных бусинок диаметром $2R = 0,18 \text{ мм}$ в воде при $\alpha = 10,06 \cdot f_{\text{кГц}}^{1/2}$ [18]

Верхняя кривая представляет точные расчетные значения в дБ/м затухания при $n = 0$. Ниже – высокочастотное приближение для жесткой оболочки

$$A_0 = 8,686 \cdot \tilde{\kappa}_{02} = 1,9057 \sqrt{f_{\text{кГц}}}, \text{ дБ/м},$$

следующее из выражения для амплитудного коэффициента поглощения звука [7, (33)]:

$$\tilde{\kappa}_{02}(\omega) = \frac{9(1 - \gamma)^2 \xi^3 \sqrt{\rho \eta} (1 + \xi^4) \sqrt{\omega}}{4\sqrt{2} [1 - (1 - \gamma)\xi^3]^2 \tilde{\rho}(\infty) \tilde{c}_\Phi(\infty) R}, \text{ м}^{-1},$$

где

$$\tilde{\rho}(\infty) = \rho \left\{ 1 + \frac{3(1 - \gamma)\xi^3}{2[1 - (1 - \gamma)\xi^3]} \right\}, \text{ кг/м}^3,$$

$\tilde{c}(\infty) = 1917,2 \text{ м/с}$ – среднее значение фазовой скорости по измерениям в [18]. Нижние три точные кривые ($n = 1, 2, 3$) практически сливаются. Несмотря на предсказываемые ими минимальные потери, эти кривые не годятся для аппроксимации экспериментальных данных, с чем неплохо справляется (кроме нижних 20, 30, 40 кГц) верхняя кривая, относящаяся к жесткой оболочке ($n = 0$) и описывающая, на этот раз, наибольшие вязкие потери.

Критерии $s_n = \tilde{\kappa}_{02}/\tilde{\kappa}_{n2}$ представлены на рис. 5. Частотам измерения соответствуют значения параметра α , охватывающие диапазон от 45 до 174, где всюду $s_n > 1$, и минимальные потери обеспечивает граничное условие Хаппеля, а не жесткая оболочка.

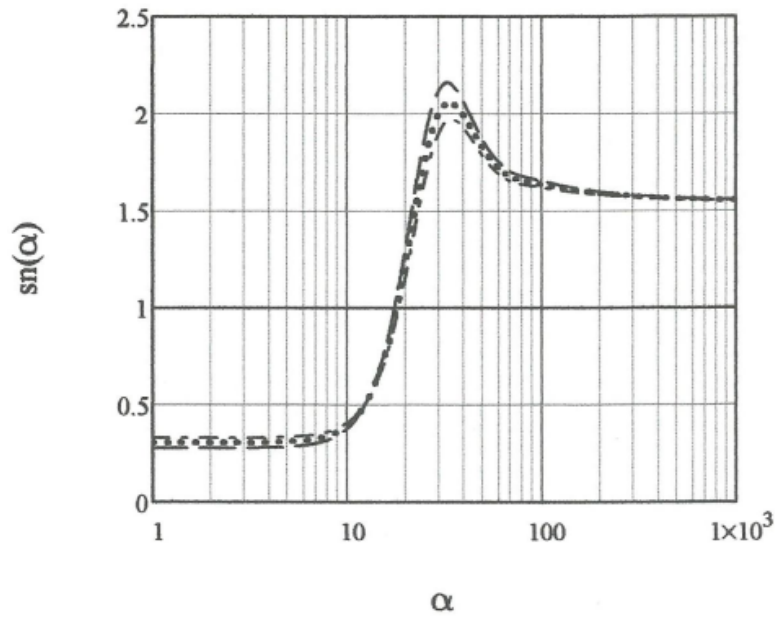


Рис. 5. Критерии $s_n(\alpha) = \frac{\tilde{\kappa}_{02}(\alpha)}{\tilde{\kappa}_{n2}(\alpha)}$ (10) для данных работы [18]

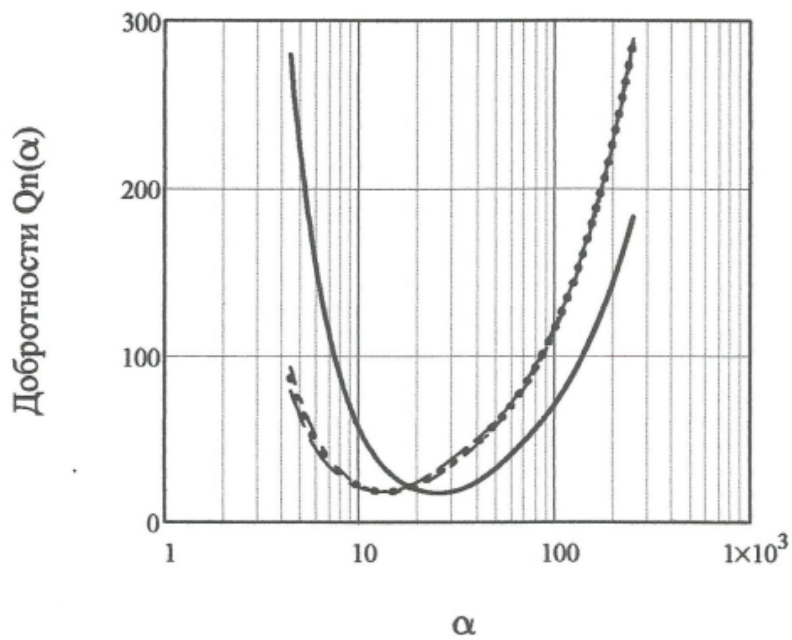


Рис. 6. Добротности $Q_n(\alpha) = \frac{\tilde{\rho}_{n1}(\alpha)}{\tilde{\rho}_{n2}(\alpha)}$ моделей суспензий при вязких потерях

Информативны также α -зависимости «добротностей» моделей суспензий при вязких звуковых потерях.

$$Q_n(\alpha) = \frac{\tilde{\rho}_{n1}(\alpha)}{\tilde{\rho}_{n2}(\alpha)} = \frac{1 + \zeta \xi^3 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - iq_n(\alpha)} \right)}{\zeta \xi^3 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - iq_n(\alpha)} \right)}.$$

Для данных работ [18] они показаны на рис. 6.

Заключение

Выполненные сравнения показали, что только при использовании граничного условия в виде жесткой оболочки удается хорошо интерпретировать экспериментальные данные, тогда как три других граничных условия для этого не годятся.

Первоначально жесткая оболочка появилась в связи с требованием минимальных потерь, призванным заменить недостающее граничное условие на поверхности ячейки. «Принцип минимума диссипации – это один из важнейших принципов отбора реальных движений из числа виртуальных. ... Природа этим принципом нам демонстрирует удивительную особенность: она допускает не просто те движения, при которых энтропия растет, а только те, при которых рост минимален... Он строго никогда не был обоснован. ... Но, с другой стороны не существует примеров, которые бы ему противоречили» [19 с. 49]. При стационарном течении в ячейке принцип минимума вязких потерь диктует необходимость ограничения ее жесткой оболочкой. Обратное, коль скоро жесткая оболочка на границе ячейки уже имеется, то согласно вариационному принципу Гельмгольца [13, с. 415], действительное медленное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости происходит с наименьшей диссипацией энергии, в отличие от любых допустимых виртуальных течений с тем же распределением скоростей на поверхности ячейки, т.е. со скоростями самой жесткой оболочки. Таким образом, для стационарных течений жесткая оболочка необходима и достаточна для выполнения принципа минимума диссипации.

Но для звуковых колебаний принцип Гельмгольца неприменим. Здесь, как показано выше, звуковые течения суспензии с жесткими оболочками ячеек скорее следуют принципу экстремальных (стационарных) потерь – в зависимости от значения параметра α (β) минимальных (чаще) или максимальных в сравнении с течениями при других граничных условиях и других распределениях граничных скоростей. Для более уверенных выводов вопрос требует дальнейших проработок (в том числе применительно к эмульсиям и вязкоупругим дисперсным средам) и сравнений с экспериментами.

Предложенная здесь теория применима к расчету звукогасящих сред. Заменяя в суспензии жидкость воздухом, получим физическую модель зернистого звукопоглощающего материала [20, с. 49]. Его отличительная особенность – большое значение параметра $\zeta \gg 1$, как и в случае волокнистых звукопоглотителей [14].

Выполнив во всех формулах здесь (а также в [14]) замену динамической вязкости жидкости η (Па·с) на $i\mu^*(\omega)/\omega$, где $\mu^*(\omega) = \mu(\omega)[1 - i\delta(\omega)]$ (Па) – комплексный модуль сдвига вязкоупругого материала, например, резины, получим средство расчета акустических характеристик резиноподобной среды с твердыми сферическими или цилиндрическими включениями [21].

Список литературы

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Пер. с англ. под ред. Буевича Ю.А. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. Квашнин А.Г. Об одной ячейной модели суспензии сферических частиц // Изв. АН СССР, МЖГ. 1979. № 4. С. 154-157.
3. Happel J. Viscous flow in multiparticle systems: slow motion of fluids relative to beds of spherical particle // A. I. Ch. E. Journal. 1958. V. 4. № 2. P. 197-205.
4. Kuwabara S. The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres on a viscous flow at small Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan. 1959. V. 14. № 4. P. 527-533.

5. Казаков Л.И. Гармонические колебания вязких капель в вязкой жидкости в условиях стесненного обтекания. Владивосток, 1984. 18 с. – Деп. в ВИНТИ 12.09.84 № 6202 – 84 Деп.
6. Казаков Л.И. Динамика капель в электрокапиллярных акустических преобразователях. Дисс. ... к.ф.-м.н. Владивосток, 1985. 114 с.
7. Казаков Л.И. О распространении звука в дисперсных средах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 330-341.
8. Исакович М.А. Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, 1973. 495 с.
9. Гинзбург В.Л. Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 31-39.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. 3-е изд. перераб. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. Бызова Н.Л., Нестеров В.С. Термическое затухание звука в суспензии высокой концентрации // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 4. С. 408-414.
12. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. 2-е изд. дополн. и перераб. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.
13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 7-е изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
14. Казаков Л.И. Ячеечные модели суспензий цилиндрических частиц при разных граничных условиях // NOISE Theory and Practice. 2019. Т. 5. № 2. С. 39–48.
15. Hampton L.D. Acoustic Properties of Sediments // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 42. № 4. P. 882-890.
16. Urick R.J. The Absorption of Sound in Suspensions of Irregular Particles // J. Acoust. Soc. Amer. 1948. V. 20. № 3. P. 283-289.
17. Dukhin A.S., Goetz P.J. Ultrasound for Characterizing Colloids. Elsevier. 2002. 372 P.
18. Novem J.M., Ingram G.D. Viscous Attenuation of Sound in Saturated Sand // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 66. № 6. P. 1807-1812.
19. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 224 с.
20. Шашкеев К.А., Шульдешов Е.М., Попков О.В., Краев И.Д., Юрков Г.Ю. Пористые звукопоглощающие материалы (обзор) // Труды ВИАМ. 2016. № 6 (42). С. 46–56.
21. Викторова Р.Н., Тютюкин В.В. Физические основы создания звукопоглощающих материалов с использованием среды с комплексной плотностью // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 331-336.

References

1. Happel J., Brenner G. Hydrodynamics at Small Reynolds Numbers. Under the editorship of Buevich Y.A. M.: Mir, 1976. 630 P. [in Russian]
2. Kvashnin A.G. On one cell model of suspension of spherical particles. Izv. AN USSR, MZHG. 1979. No. 4. Pp. 154-157. [in Russian]
3. Happel J. Viscous flow in multiparticle systems: slow motion of fluids relative to beds of spherical particle // A. I. Ch. E. Journal. 1958. V. 4. No. 2. P. 197-205.
4. Kuwabara S. The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres on a viscous flow at small Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan. 1959. V. 14. No. 4. P. 527-533.
5. Kazakov L.I. Harmonic oscillations of viscous droplets in viscous liquid under constrained flow conditions. Vladivostok, 1984. 18 p. - DEP. in VINITI 12.09.84 No. 6202 - 84 DEP. [in Russian]

6. Kazakov L.I., Dynamics of droplets in an acoustic electrocapillary converted the stands. Diss. ... Ph. D. Vladivostok, 1985. 114 PP. *[in Russian]*
7. Kazakov L.I. On the propagation of sound in dispersed media. *Acoust. Phys.* 2018. T. 64. No. 3. P. 330-341.
8. Isakovich M. A. General Acoustics. Textbook. M.: Science, 1973. 495 P. *[in Russian]*
9. Ginzburg V.L. On the General Relationship between Absorption and Dispersion of Sound Waves // *Acoust. Phys.* 1955. Vol. 1. No. 1. P. 31-39.
10. Landau L. D., Lifshits E. M. Hydrodynamics. 3 ed., revised. M.: Science, 1986. 736 P. *[in Russian]*
11. Buzova N.L., Nesterov V. S. Thermal Attenuation of Sound in a High Concentrated Suspension. *Acoust. Phys.* 1959. Vol. 5. No. 4. P. 408-414.
12. Levich V.G. Physico-chemical Hydrodynamics. 2 ed., suppl. and revised. M.: GIFML, 1959. 699 P. *[in Russian]*
13. Loitsyansky L.G. Mechanics of Liquid and Gas. 7th ed. M.: Bustard, 2003. 840 P. *[in Russian]*
14. Kazakov L.I. Cell Models of Suspensions of Cylindrical Particles under Different Boundary Conditions // *NOISE Theory and Practice.* 2019. Vol. 5. No. 2. P. 39-48. *[in Russian]*
15. Hampton L.D., Acoustic Properties of Sediments // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1967. V. 42. No. 4. P. 882-890.
16. R.J. Urick, The Absorption of Sound in Suspensions of Irregular Particles // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1948. V. 20. No. 3. P. 283-289.
17. Dukhin A.S., Goetz, P.J. Ultrasound for Characterizing Colloids. Elsevier.2002. 372 p.
18. Hovem, J.M., Ingram D.G. Viscous Attenuation of Sound in Saturated Sand // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1979. V. 66. No. 6. P. 1807-1812.
19. Moiseev N.N. Mathematics puts the Experiment. M.: Science, 1979. 224 P. *[in Russian]*
20. Shashkeev K.A., Shuldeshov E.M., Popkov O.V., Kraev I.D., Yurkov G.Yu. Porous Sound-absorbing Materials (review) // *Proceedings of VIAM.* 2016. No. 6 (42). P. 46-56. *[in Russian]*
21. Viktorova R.N., Tyutekin V.V. Physical Bases of Creation of Sound-absorbing Materials with Use of Environment with Complex Density. *Acoust. Phys.* 1998. T. 44. No. 3. P. 331-336.