ISSN 2412-8627
Vol. 5 No. 1

12+

Noise
Theory and Practice

Scientific Journal

I
2019

Acoustic Design Institute

Редакционная коллегия

Noise Theory and Practice

Научный журнал

Том 5 №1

Учредитель
Общество с ограниченной ответственностью
"Институт акустических конструкций" (ООО "ИАК")
при БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д.Ф. Устинова

Сетевой Научный Журнал
'Noise Theory and Practice'
выпускается с 2015 г.
Основателем Журнала является д.т.н., профессор, зав. кафедрой "Экология и безопасность жизнедеятельности" Балтийского государственного технического университета "ВОЕНМЕХ" им. Д.Ф. Устинова основатель транспортной акустики в России - Иванов Николай Игоревич.

"Noise Theory and Practice" посвящен фундаментальным проблемам в области виброакустики и принимает работы по направлениям:
- 29.00.00 Физика
- 29.37.00 Акустика
- 43.00.00 Общие и комплексные проблемы естественных и точных наук
- 87.00.00 Охрана окружающей среды. Экология человека

Все статьи, поступающие в редакцию, проходят обязательное резензирование. Журнал является открытым сетевым ресурсом и издается с периодичностью четыре раза в год.

Фактический адрес редакции
Россия, г. Санкт-Петербург,
ул. Промышленная, д.19, лит. Р,
оф. 444
+7 (812) 500-08-26
www.noisetp.com
e-mail: noise.science@gmail.com
Ответственный секретарь
Рассошенко Ю.С.

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство
ЭЛ № ФС 77-74057

Содержание

Editorial Board

Noise Theory and Practice

Scientific Journal

Vol. 5 No. 1

The founder

Limited liability company 'Acoustic Design Institute' (LLC 'ADI')
in cooperation with Baltic State Technical University 'VOENMEH'
named after D. F. Ustinov

The Online Scientific Journal
'Noise Theory and Practice'
has been published since 2015.
The founder of the journal is Nikolay Igorevich Ivanov, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of 'Environmental studies and health and safety' department of the Baltic State Technical University 'VOENMEH' named after D. F. Ustinov, the founder of the transport acoustics in Russia.

'Noise Theory and Practice' is devoted to the fundamental problems in the field of vibroacoustics and accepts papers in the following areas:
- 29.00.00 Physics
- 29.37.00 Acoustics
- 43.00.00 General and complex issues of natural and exact sciences
- 87.00.00 Environmental protection. Human ecology.

All articles submitted to the editorial office are subject to mandatory review. The journal is an open network resource and published four times a year.

Location address of the Editorial office
19 building 'R' Promyshlennaya str., office 444
+7 (812) 500-08-26
www.noisetp.com
e-mail: noise.science@gmail.com
Executive Secretary
Rassoshenko Iuliia

Journal is registered in Federal service for supervision of communications, information technology, and mass media
The certificate of registration
ЭЛ № ФС 77-74057

Contents

УДК 534
OECD 01.03.AA

Measuring sound reflection coefficient using a directional speaker and two microphones: two applications cases

Robin O.[1*], Laly Z.[2], Atalla N.[3]
[1]Research assistant, Groupe d'acoustique de l'université de Sherbrooke, Faculté de Génie, Département de génie mécanique, 2500 boulevard de l'université, Sherbrooke, J1K2R1, Canada
[2]Postdoctoral researcher, Groupe d'acoustique de l'université de Sherbrooke, Faculté de Génie, Département de génie mécanique, 2500 boulevard de l'université, Sherbrooke, J1K2R1, Canada
[3]Professor, Groupe d'acoustique de l'université de Sherbrooke, Faculté de Génie, Département de génie mécanique, 2500 boulevard de l'université, Sherbrooke, J1K2R1, Canada

Abstract

Using the classical two-microphone approach and a source-image model, this paper investigates the possibility of measuring sound reflection in two specific cases using a directional transducer instead of a classical loudspeaker or a point source (monopole). A first experiment aims at measuring the sound absorption of three materials at normal incidence in a reverberant room. A second experiment is made in a hemi-anechoic room for measuring the sound reflection on a honeycomb panel at oblique incidence. All obtained results depict good agreement with theoretical predictions. The use of a parametric speaker proves to be a solution for limiting influence of both room and sample dimensions, with satisfactory sound absorption measurement results even in highly reverberant environments on small specimen. A directional speaker also allows setting up tests under oblique incidence. Combining these two possibilities provide a basis for the development of *in situ* tests in complex sound environments and for variable incidence angles.

Key words: directional speaker, sound absorption coefficient, reverberant environments

Измерение коэффициента отражения звука с помощью направленного динамика и двух микрофонов: два случая применения

Robin O.[1], Laly Z.[2], Atalla N.[3]*
[1] Научный ассистент, Акустическая группа Шербрукского университета, Инженерный факультет, Отделение машиностроения, 2500 Университетский бульвар, Шербрук, J1K2R1, Канада
[2] Научный сотрудник, Акустическая группа Шербрукского университета, Инженерный факультет, Отделение машиностроения, 2500 Университетский бульвар, Шербрук, J1K2R1, Канада
[3] Профессор, Акустическая группа Шербрукского университета, Инженерный факультет, Отделение машиностроения, 2500 Университетский бульвар, Шербрук, J1K2R1, Канада

Аннотация

В данной работе исследуется возможность измерения отражения звука в двух конкретных случаях с помощью направленного преобразователя вместо классического динамика или точечного источника (монополя) с использованием классического подхода с двумя микрофонами и модели мнимого источника. Первый эксперимент направлен на измерение звукопоглощения трех материалов при нормальном падении в реверберационной камере. Второй эксперимент состоит в полу-безэховой камере для измерения отражения звука на многослойную панель при косом падении. Все полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими прогнозами. Применение параметрического динамика является решением вопроса об ограничении влияния размеров камеры и образца, с удовлетворительными результатами измерения звукопоглощения даже в среде с высокой реверберацией

[*]*E-mail:olivier.robin@usherbrooke.ca (Robin O.)*

в уменьшенном масштабе. Направленный динамик также позволяет проводить испытания при косом падении. Комбинация двух этих возможностей создает основу для разработки испытаний в месте нахождения в сложных звуковых средах и переменных углах падения.

Ключевые слова: *направленный динамик, коэффициент поглощения звука, реверберационная среда.*

Introduction

Standardized sound absorption measurements consider either a normal incidence plane wave in an impedance tube [1] or a diffuse sound field in a reverberant room [2]. Arrangements or improvements of the impedance tube method so as to include oblique incidence angles were proposed nearly a century ago [3] or more recently with a multi-modal decomposition method [4]. On site (or *in situ)* methods at normal or oblique incidence have also been widely investigated for measuring sound absorption, reflection or impedance in non-laboratory environments. A review published in 2015 points out in its conclusion that '*new methods need to be developed in order to measure the in-situ surface impedance under more realistic conditions (e.g. in small cavities and under reverberant conditions, curved or irregular surfaces, etc.)*' [5].

The concept of directional (or parametric) loudspeaker was invented in the 60s [6], and is based on using an array of ultrasonic transducers for producing a highly directional audio beam using non-linear demodulation effects. Among other possible applications of this technology, several authors have proposed to use directional speakers for measuring sound transmission or absorption of materials. Castagnède et al. [7, 8] were the first to use a parametric loudspeaker for measuring absorption, transmission and dispersion of sound absorbing porous materials in the time domain using a single microphone, with very satisfactory results. Kuang et al. [9] then investigated the possibility of using a parametric loudspeaker to derive the diffuse-field absorption coefficient from a series of measurements made for different incidence angles. Plane wave propagation was assumed and the classical two-microphone method was used [10], with satisfactory results in the 1000-2500 Hz frequency range for a single test sample. A similar idea was used by Sugahara et al. [11] for characterizing materials under normal incidence in a hemi-anechoic room and in a conference quiet room, and it was shown that room and sample size effects could both be reduced. Finally, Romanova et al. [12] recently used a parametric loudspeaker with a sound intensity probe to measure sound absorption of a living green wall with promising results.

Compared with previously cited works, the main contribution of the present paper is to investigate the possibility of measuring sound reflection in a highly reverberant environment or for very specific materials (here a honeycomb structure). Reference measurements are all obtained using a parametric loudspeaker and the classical two microphone method. Three different materials are first characterized under normal incidence in a large reverberant room and a comparison is made with theoretical calculations and with measurements made using a monopole source. The reflection coefficient under oblique incidence of a honeycomb panel, a purely reactive material according to theory, is then measured in a hemi-anechoic room. The obtained measurement results are compared to theoretical ones.

1. Theoretical background

Let's consider a point source (i.e. omnidirectional or 'monopole' source) placed at a height z_s above a sound absorbing material of thickness h. Such kind of acoustic source can be characterized by its volume velocity q (in m^3/s) or volume acceleration $\dot{q}$ (in m^3/s^2). Two microphones denoted M1 and M2 are placed above the material sample at heights z_1 and z_2, respectively. Figure 1 depicts the general problem under consideration.

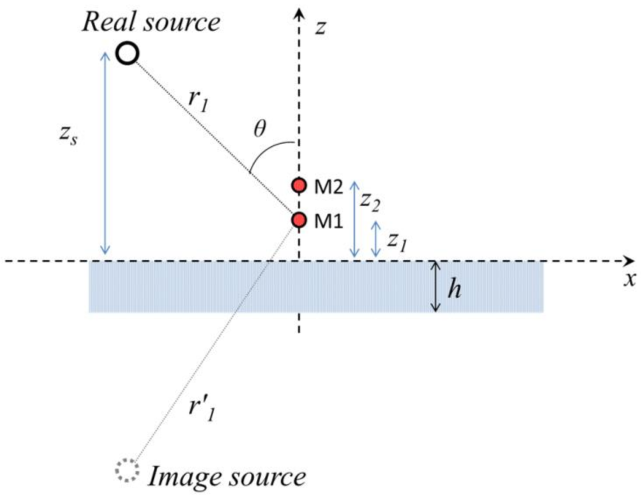


Fig. 1. Typical two-microphone experimental setup based on an image-source model

If the separation of the two microphones is small (so that the incidence angle is approximately equal at each) and for large values of $k_0\, r_j$ (r_j being the distance between the sound source and microphone j), the sound pressure p_j at microphone M_j (j=1,2) at angular frequency ω can be written as a superposition of two spherical fields

$$p_j(\theta,\omega) = \rho_o\, \dot{q} \left(\frac{e^{jk_0 r_j}}{r_j} + R(\theta,\omega) \frac{e^{jk_0 r'_j}}{r'_j} \right) \tag{1}$$

where ρ_0 is the air mass density, k_0 is the acoustic wave number ($= \omega/c_0$, c_0 being the speed of sound), and $R(\theta,\omega)$ is the complex reflection coefficient at the surface of the sound absorbing material. Using the measured transfer function between the two microphones, $H(\theta,\omega) = p_2(\theta,\omega) \,/\, p_1(\theta,\omega)$, and Equation (1) allows calculating the reflection coefficient for a given incidence angle θ and at angular frequency ω [10]

$$R(\theta,\omega) = \frac{\frac{e^{jk_0 r_2}}{r_2} - H(\theta,\omega)\frac{e^{jk_0 r_1}}{r_1}}{H(\theta,\omega)\frac{e^{jk_0 r'_1}}{r'_1} - \frac{e^{jk_0 r'_2}}{r'_2}}. \tag{2}$$

From the result obtained with Equation (2), the sound absorption coefficient can be finally deduced using the relation $\alpha(\theta,\omega) = 1 - |R(\theta,\omega)|^2$.

2. Test case #1: measurements at normal incidence in a reverberant room

A first series of tests was conducted in a reverberant room which has a volume V of approximately 140 m^3 (7.5 m x 6.2 m x 3 m), and a mean reverberation time T of 5.5 s in the 200-1000 Hz frequency range. The reverberation radius r_r [13], for which the amplitude of direct and reflected sound is equal, is approximately 29 cm in this room for an omnidirectional source (using $r_r \approx 0.057\,(V/T)^{0.5}$). The Schroeder frequency f_c, above which the sound pressure field can be considered diffuse [14], is approximately 400 Hz (using $f_c = 2000(T/V)^{0.5}$). A parametric transducer (Soundlazer mini parametric board) and a monopole source (LMS mid-high frequency) were installed side-by-side at a height z_s = 2 m (see

Figure 2). The parametric transducer board is composed of 50 ultrasonic transducers of 10 mm diameter each.

Both sources were driven with a swept sine signal from 200 Hz to 3000 Hz, the 200 Hz cut-off frequency being linked to low frequency limitations of the sources. Two quarter inch microphones were placed above the material surface, at heights z_1 = 3.5 mm and z_2 = 33.5 mm (see Figure 1). The data were acquired using a LMS Testlab system, and the transfer function between the two microphones was post-processed so as to calculate the sound reflection according to Eq. (2). Small samples of three different sound absorbing materials were directly laid on the room's floor, with no specific mounting conditions (a thick glass wool, a thin compressed glass wool board and melamine foam with two thicknesses; the materials non-acoustic parameters were measured at GAUS labs; see details in Table 1). For the melamine foam of 1 in. thickness, two measurement positions were considered (see Figures 2 c) and 2d), respectively)

Table 1
Characteristic of the tested materials in the reverberant room under normal incidence

	Glass wool	**Compressed glass wool panel**	**Melamine foam**
Tortuosity (-)	1	1	1
Porosity (-)	0.99	0.96	0.98
Flow resistivity (Nsm^{-4})	4860	22200	7920
Viscous length (μm)	225	57	132
Thermal length (μm)	388	115	149
Foam mass density (kg/m^3)	10	66	6.1
Sample dimensions (length x width x thickness, in m)	1.24 x 0.35 x 0.095	1.24 x 0.61 x 0.025	1.3 x 0.7 x 0.025 0.8 x 0.5 x 0.013

In order to obtain a reference value for sound absorption under a normally incident acoustic plane wave, numerical simulations were done using the Transfer Matrix Method (TMM) [15]. Both materials are considered as laterally infinite layers of finite thickness on a hard backing, and modeled as rigid porous materials. The equivalent fluid model thus assumes that the skeleton of the material is rigid (the solid phase of the material remains motionless). The Johnson-Champoux-Allard material model was used in all cases [15].

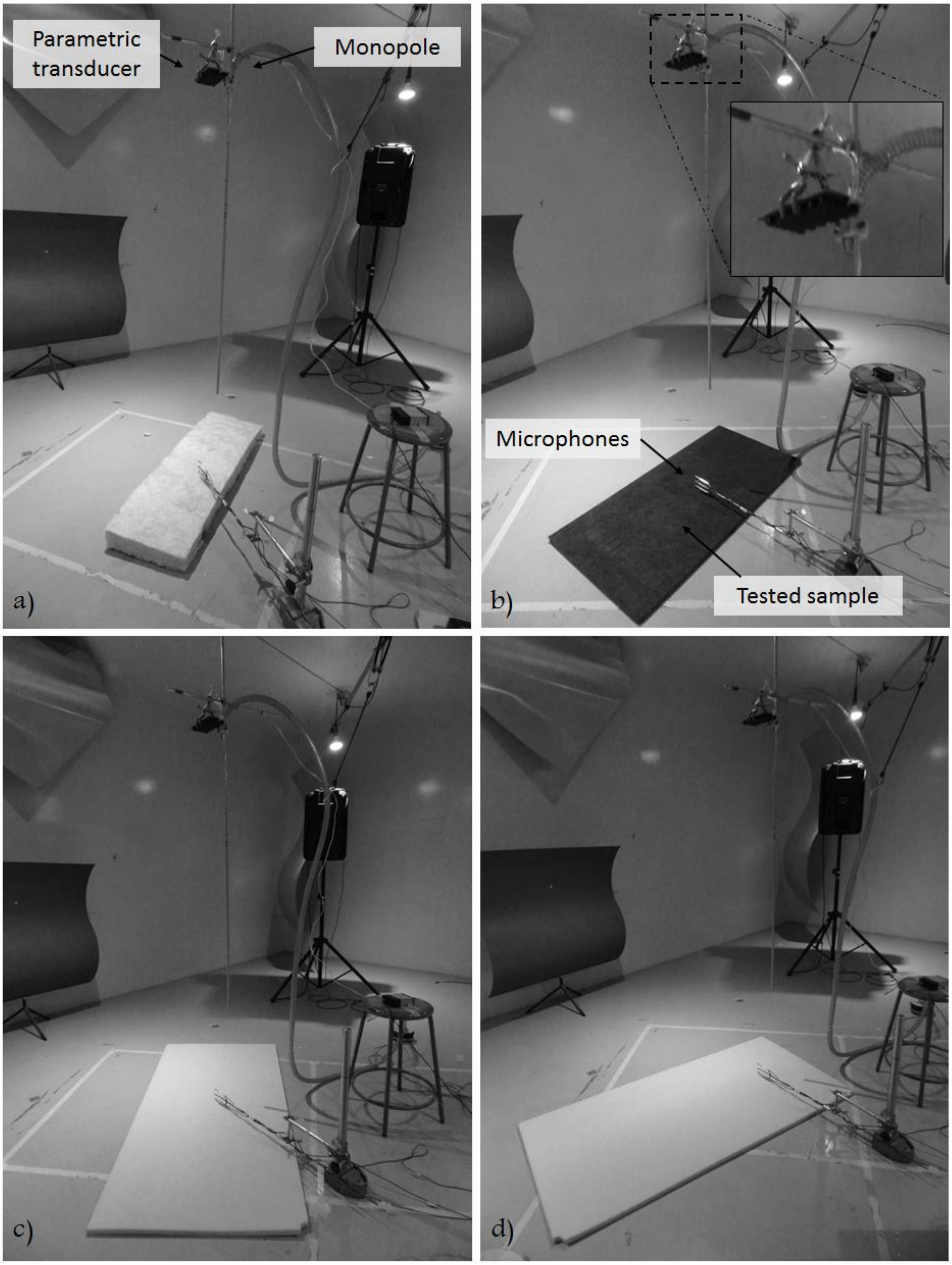


Fig. 2. Pictures of measurements in the reverberant room – a) Glass wool – b) Compressed glass wool panel – c) Melamine foam, 1-inch thick (position 1) – d) Melamine foam, 1-inch thick (position 2)

Measurement and simulation results are presented in Figs. 3-6 in terms of sound absorption coefficient for the glass wool, the compressed glass wool panel and the melamine foam with two thicknesses, respectively (values given in 1/12th octave frequency bands). For each tested material, the obtained results with the monopole source present an erratic behavior. Anomalous sound absorption values are obtained in a large part of the considered frequency band. These are values that are non-consistent with the simulation target or even negative, especially for a low sound absorption sample like the 0.5 in thick melamine foam, see Fig. 6. This can be attributed first to spurious sound reflections in the room and also to finite size effects of the sample (especially edge's effect).

When the parametric speaker is used, its directional properties allow focusing the sound energy on the material surface (and not on edges) and limiting the adverse effect of sound reflections. The sound absorption values obtained with the parametric speaker are in good agreement with the simulation results from 500 to 3000 Hz. The discrepancy seen below a frequency of approximately 500 Hz is attributed to the low-frequency limitations of sound sources. A larger microphone spacing would be also desirable so as to limit phase mismatch in low-frequency [10] that might have non-negligible influence below 1000 Hz. Finally, it is also known [10] that discrepancies are expected for low values of $k_0\, r$, since Eq. (2) rely on a spherical decoupling hypothesis which implies an approximation of the actual sound pressure field above the material surface.

The method also shows to be robust to the microphone positioning, as illustrated by the result given in Figure 5, with two measurement positions on the same sample, see Figure 2 c) and d). The results obtained at two positions using the parametric speaker are nearly superimposed above a frequency of 500 Hz. Using the monopole source, the results obtained are not coherent with the theoretical result, and not even coherent between the two measurement points.

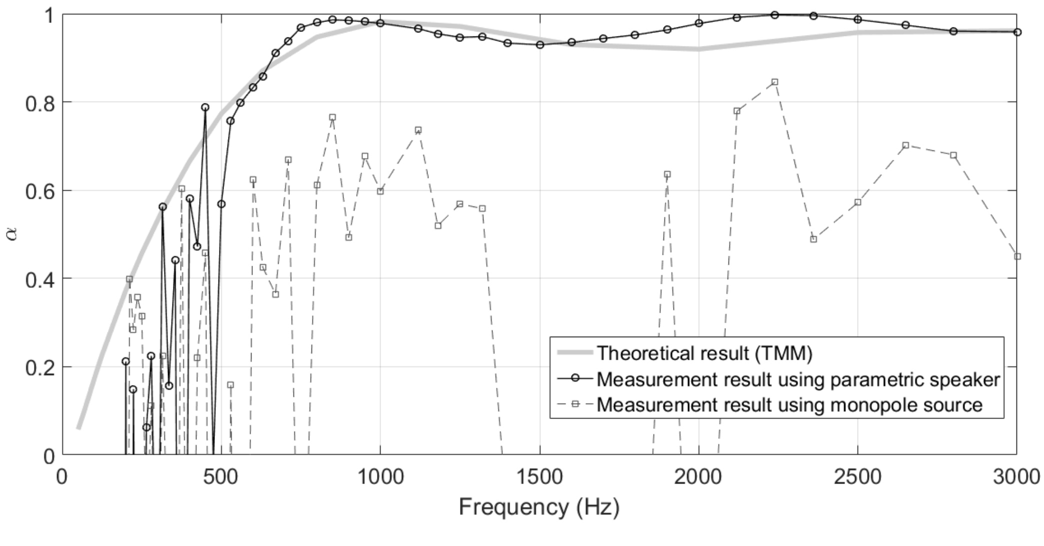


Fig. 3. Measurement and simulation results for the glass wool

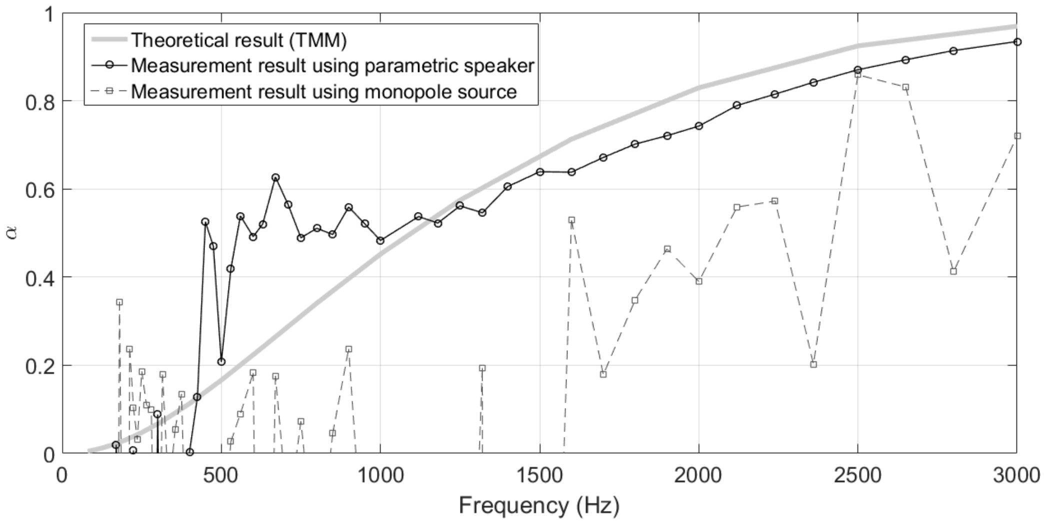


Fig. 4. Measurement and simulation results for the compressed glass wool panel

The discrepancy between measurement and simulation results in the 500 – 1000 Hz range for the compressed glass wool panel and for the 1-inch thick melamine foam (25.4 mm) is attributed to possible movement of the material's frame, since it was directly laid on the floor of the reverberant room with no back-adhesive (the rigid backing condition using in simulation might thus be not fully verified in practice). As pointed out by Sugahara et al. [11], this could also be linked to the so-called 'pseudo-sound' (a spurious signal generated by nonlinearity effects), but this effect contaminated their measurements up to a frequency of 1.5 kHz. Nevertheless, the obtained results in this harsh acoustic environment and for such small samples are very promising.

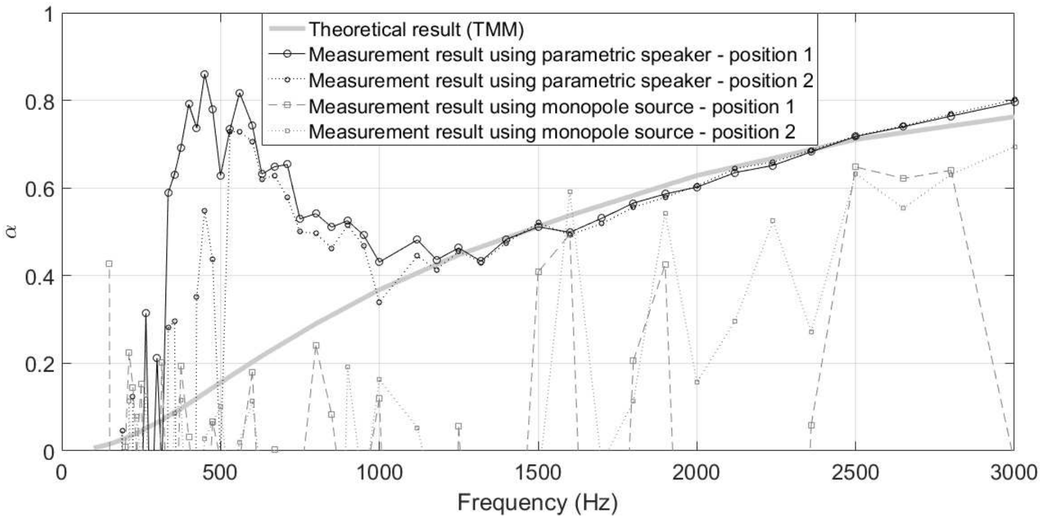


Fig. 5. Measurement and simulation results for the 1 in. thick melamine foam

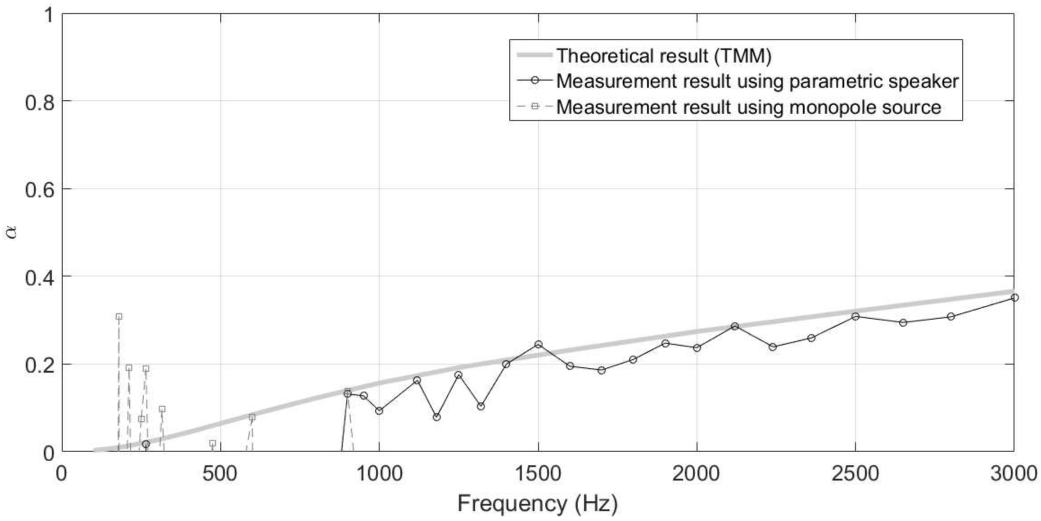


Fig. 6. Measurement and simulation results for the 0.5 in. thick melamine foam

3. Test case #2: measurements at oblique incidence on a honeycomb panel in controlled acoustic conditions

In this section, a honeycomb panel is considered. Such structures are widely used in the aeronautical industry, and typically combined with micro-perforated panels for designing engine liners. It is known that the sound absorption of liners is highly dependent on both the incidence angle and the sound pressure level [15], but measurements on these highly reactive and possibly non-linear materials are usually challenging. A measurement technique that would be robust to noise and environmental conditions and that could be applied for oblique incidence characterization of such materials is highly desirable. A first proof of concept towards this goal is briefly presented in this section, with a measurement of the sound reflection coefficient under an oblique incidence angle (see Figure 7). The only difference with the experimental setup described in section 2 is the source height z_s that now equals 1.2 m. Microphone type and separation, excitation signal and acquisition system are identical. The honeycomb sample has a 1.3 m^2 area and a thickness D = 31.75 mm.

The normalized surface impedance at oblique incidence for a layer of finite thickness backed by an impervious rigid wall (an air cavity in this case) is theoretically given by [15]

$$Z_s = -\frac{j}{\cos\theta}\cot\left(\frac{\omega D}{c_0}\cos\theta\right). \quad (3)$$

From the surface impedance and under a plane wave hypothesis, the reflection coefficient can be obtained using the relation $R = (Z_s \cos\theta - Z_0) / (Z_s \cos\theta + Z_0)$, with Z_0 the air impedance (the product of the air mass density with the speed of sound).

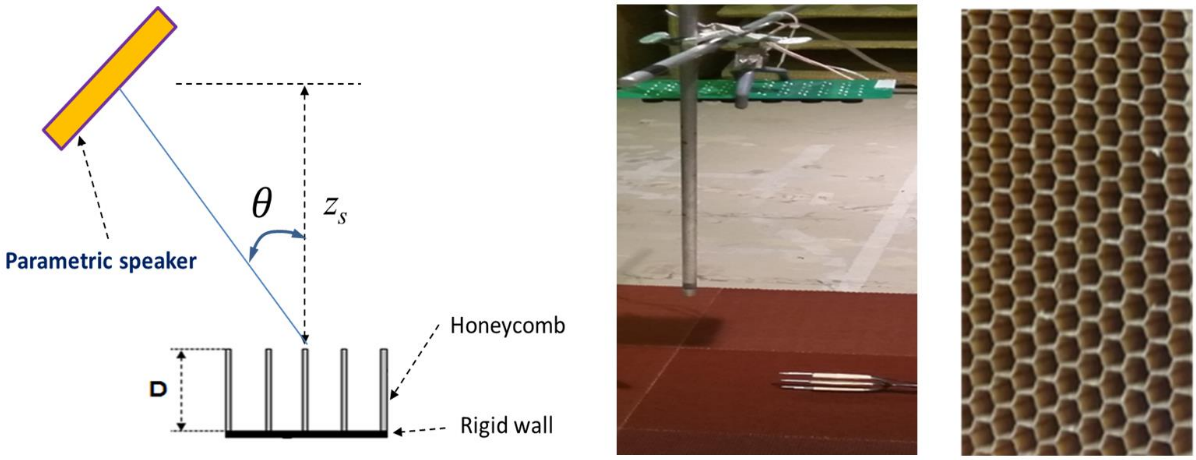


Fig. 7. (left) Sketch of the measurement setup – (middle) picture of the parametric speaker and measurement microphones installed above the honeycomb structure – (right) close-up view of the honeycomb

The real and imaginary parts of the measured and theoretical reflection coefficient are presented in figures 8 a) and 8 b), respectively. The considered incidence angle is 10 degrees, and a good agreement between results is seen on the whole considered frequency range (limited to 1500-4000 Hz for this material). The results obtained for a 30^o incidence angle in terms of real part (resistance) and imaginary part (reactance) of the surface impedance are provided in Figures 9 a) and b), respectively. It is confirmed by measurements that the surface impedance is nearly always purely imaginary on the tested frequency range. Tests conducted for other incidence angles (0^o and 20^o) also showed satisfactory agreement between measurements and theory [16]. When the monopole was used in this controlled acoustic environment, similar results were obtained between the two acoustics sources. A point of interest when using the parametric speaker is that larger sound pressure levels can be easily reached (above 100 dB), when a level of 80 dB is hardly attained for the monopole. This could be an asset for testing such materials in complex environment and under high sound pressure levels.

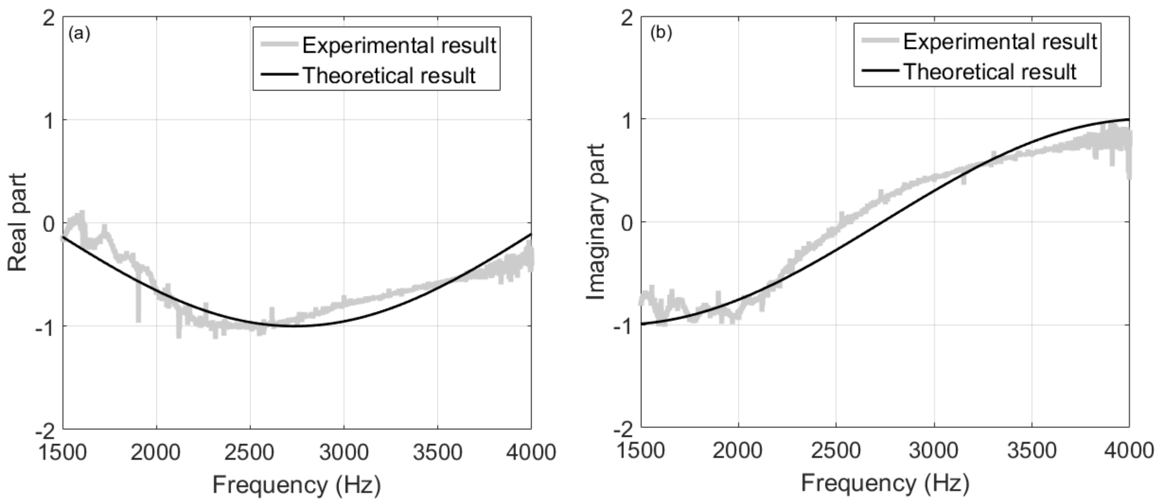


Fig. 8. Measurement and simulation results for the honeycomb panel – Reflection coefficient for a 10^o incidence angle

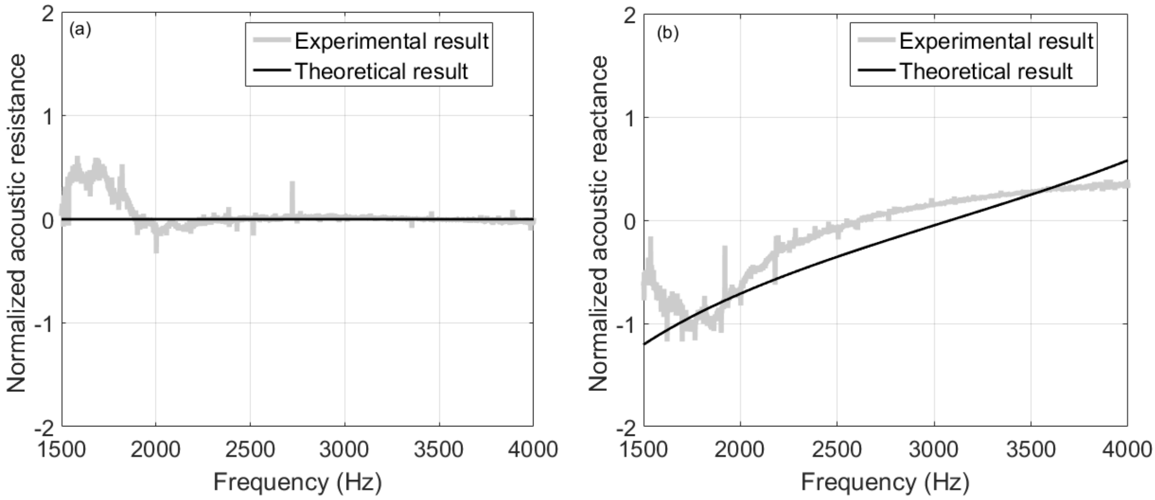


Fig. 9. Measurement and simulation results for the honeycomb panel – Normalized surface impedance for a 30° incidence angle

Conclusion

This paper presented two application cases for sound reflection measurement on materials that were first conducted in a complex environment, a reverberant room. The use of a directional speaker proves to be a solution for performing measurements in such rooms. For a normal incidence case, the obtained results are in overall good agreement with theoretical predictions on the 500 – 3000 Hz frequency range when measurement made using a monopole source provided largely erroneous results in the considered frequency band. Sound reflection measurements were also conducted at oblique incidence in controlled acoustic conditions (i.e. a hemi-anechoic room) on a honeycomb structure. Comparisons made with theoretical predictions are satisfactory.

The technology of the parametric speaker that was still prohibitive in terms of price ten years ago has now become affordable, and allows designing interesting measurement apparatus. The high sound directivity provides large immunity to room effects and easiness to reach high localized sound pressure levels and to perform measurements under oblique incidence. These features are especially adequate for the development of an *in situ* measurement system. Further work includes possible improvements below a frequency of approximately 500 Hz (using either other sensors, or specific post-processing), and testing the proposed approach with other commercially available transducers that might offer improved performance.

References

1. International Standard Organization. Acoustics – Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes – Part 2: Transfer-function method. ISO standard 10534-2. (1998).
2. International Standard Organization. Acoustics – Measurement of sound absorption in a reverberation room. ISO standard 354:2003. (2003).
3. P.R. Heyl, V.L. Chrisler, and W.F. Snyder ``The absorption of sound at oblique angles of incidence,” Bureau of Standards Journal of research 4(2), 289-296 (1929).
4. T. Schultz, L. N. Cattafesta, M. Sheolak, ``Modal decomposition method for acoustic impedance testing in square ducts”, J. Acoust. Soc. Am. 120, 3750–3758 (2006).

5. E. Brandao, A. Lenzi and S. Paul, ``A Review of the In Situ Impedance and Sound Absorption Measurement Techniques," Acta Acustica united with Acustica, 101 (3), 443-463 (2015)
6. Westervelt P.J., ``Parametric acoustic array", J. Acoust. Soc. Am. 35(4):535–7 (1963)
7. Castagnède B, Saeid M., Moussatova A, Gusev V, Tournat V., ``Reflection and transmission at normal incidence onto air-saturated porous materials and direct measurements based on parametric demodulated ultrasonic waves," Ultrasonics 44, 221–229 (2006).
8. Castagnède B., Moussatov A., Lafarge D., and Saeid M., ``Low frequency in situ metrology of absorption and dispersion of sound absorbing porous materials based on high power ultrasonic non-linearly demodulated waves", Applied Acoustics 69, 634–648 (2008)
9. Kuang Z, Ye C, Yang J., ``A method for measuring diffuse-field sound absorption coefficients of materials using parametric loudspeaker", Proceedings of Symposium on Ultrasonic Electronics, 31, 331–2 (2010).
10. J.-F. Allard, Y. Champoux, ``In-situ two microphone technique for the measurement of the acoustic surface impedance of materials", Noise Control Engineering Journal 32 15–23 (1989).
11. Sugahara A, Hyojin L, Sakamoto S, Takeoka S., ``A study on the measurements of the absorption coefficient by using a parametric loudspeaker", Proc. Inter-Noise 2017:2401–9 (2017).
12. Romanova A, Horoshenkov K.V., Hurrell A., ``An application of a parametric transducer to measure acoustic absorption of a living green wall", Applied Acoustics 145 89–97 (2019).
13. Kuttruff, H. Room Acoustics (6th edition). Boca Raton: CRC Press (2017).
14. Schroeder M., ``The ''Schroeder frequency'' revisited", The Journal of the Acoustical Society of America 99, 3240-3241 (1996)
15. J.-F. Allard, N. Atalla, ``Propagation of sound in porous media: Modeling sound absorbing materials" (second edition). John Wiley & Sons, Chichester, 372pp. (2009)
16. Laly Z., 'Développement, validation expérimentale et optimisation des traitements acoustiques des nacelles de turboréacteurs sous hauts niveaux acoustiques', Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke (2017).

УДК 641.5.06:620.111

OECD 02.11.JY

Моделирование крутильных колебаний в виброакустических системах машин очистки корнеклубнеплодов

Заплетников И.Н.[1], Пильненко А.К.[2] , Севаторова И.С.[3]
[1]Зав. кафедрой оборудования пищевых производств
[2]Доцент кафедры оборудования пищевых производств
[3]Ассистент кафедры оборудования пищевых производств
[1,2,3]Донецкий национальный университет экономики и торговли имени Михаила Туган-Барановского, г. Донецк, ул. Щорса, 31

Аннотация

В статье представлены методика расчета и динамическая модель виброакустической системы машин очистки корнеклубнеплодов типа МОК. Наглядно показана типовая кинематика этих машин. Расчеты моментов инерции и жесткостей системы произведены для машины МОК-150, серийно выпускаемой заводом торгового машиностроения г. Барановичи Республики Беларусь. Динамическая модель машины представлена в виде пятимассовой системы. В качестве масс принимались вращающиеся звенья машины, начиная от ротора электродвигателя и заканчивая терочным диском, в качестве упругих элементов – валы и клиноременная передача. Приведены уравнения для определения потенциальной и кинематической энергии системы. Рассчитаны приведенные к валу электродвигателя моменты инерции масс машины и приведенные коэффициенты жесткости участков вала. Для описания крутильных колебаний системы использовано уравнение Лагранжа. Составлены системы из пяти дифференциальных уравнений второго порядка. Решение системы произведено в программе Matcad. В результате определены для машины МОК-150 собственные и вынужденные частоты и амплитуды крутильных колебаний виброакустической системы. Проведен анализ полученных результатов расчета**.**

Ключевые слова: машина очистки корнеклубнеплодов, динамическая модель, крутильные колебания.

Simulation of torsional vibrations in vibro-acoustic systems of machines for cleaning root and tuber crops

Zapletnikov I.N.[1], Pilnenko A.K.[2], Sevatorova I.S.[3]
[1] Professor, Head of the Department of Food Production Equipment
[2] Assistant professor of the Department of Food Production Equipment
[3]Assistant of Food Production Equipment
[1,2,3]Donetsk National University of Economics and Trade named after Mikhail Tugan-Baranovsky, Donetsk

Abstract

The article presents the method of calculation and the dynamic model of the vibro-acoustic system of machines for cleaning root crops of the IOC type. The typical kinematics of these machines are clearly shown. Calculations of the moments of inertia and stiffness of the system are made for the machine IOC-150, mass-produced by the factory of commercial machinery in Baranovichi of the Republic of Belarus. The dynamic model of the machine is presented in the form of a five mass system. The masses were rotating parts of the machine starting from the rotor of the electric motor and ending with a grating disc, as the elastic elements - shafts and V-belt transmission. The equations for determining the potential and kinematic energy of the system are given. The inertia moments of mass of the machine and the reduced stiffness coefficients of the shaft sections are calculated to the shaft of the electric motor. To describe the torsional vibrations of the system, the Lagrange equation is used. A system of five second-order differential equations is composed. The system solution is made in the Matcad program. As a result, the own and forced frequencies and amplitudes of torsional vibrations of the vibro-acoustic system were determined for the IOC-150 machine. The analysis of the obtained results of the

[*] *E-mail: obladn@kaf.donnuet.education (Заплетников И.Н.), pilnenko_a@mail.ru (Пильненко А.К.)*

calculation.

Key words: *machine for cleaning root crops, dynamic model, torsional vibrations.*

Введение

Машины очистки корнеклубнеплодов типа МОК широко представлены на предприятиях общественного питания. С их помощью достигается механизация ручного труда работников по очистке корнеклубнеплодов от кожуры. Работоспособность данных машин имеет большое значение для бесперебойной и эффективной работы предприятий общественного питания. В свою очередь, на работоспособность машин МОК оказывает негативное влияние возникновение крутильных колебаний от динамических процессов, происходящих при работе машины.

Наибольшее распространение на этих предприятиях для выполнения технологической операции – очистки корнеклубнеплодов от кожуры, получили машины МОК-150. Они имеют незначительные габариты, массу, энергопотребление, удобны в обслуживании и эксплуатации.

Проблеме исследования крутильных колебаний посвящено достаточно большое количество трудов. Анализом крутильных колебаний технических систем начали заниматься еще в начале прошлого века, когда встала проблема поломок валов некоторых силовых установок. Эта проблема активизировала так же создание аппаратуры для измерения вибрационных явлений и разработку методов их расчета. Особенно эти исследования нашли широкое применение в тяжелом машиностроении [1, 2]. Однако исследованиям крутильных колебаний машин перерабатывающей и пищевой промышленности уделено недостаточное внимание.

Целью работы является расчет амплитуд и частот свободных и вынужденных крутильных колебаний на примере машины МОК-150.

1. Основное содержание и результаты работы

Конструкция машины очистки корнеклубнеплодов МОК-150 (рис. 1) включает асинхронный электродвигатель АИР71А4 1, вращение от которого через клиноременную передачу 2, 3 передаётся на вал рабочего органа 4, установленного в подшипниковых опорах, и рабочий орган – абразивный терочный диск 5. Для исследования крутильных колебаний необходимо определить моменты инерции элементов конструкции и жёсткости упругих участков конструкции. Моменты инерции вышеперечисленных деталей машины вычислялись с использованием системы твёрдотельного 3D моделирования КОМПАС и приведены в таблице 1.

Таблица 1
Инерционно-жёсткостные характеристики механической части машины

Деталь машины	Момент инерции (*I*), кгм^2	Жёсткость (*C*), Нм/рад
Ротор электродвигателя	$1{,}3\cdot10^{-3}$	-
Вал электродвигателя	$4{,}63\cdot10^{-6}$	$1{,}9\cdot10^{4}$
Ведущий шкив	$3{,}84\cdot10^{-4}$	-
Клиноременная передача	-	$4\cdot10^{3}$
Ведомый шкив	$2{,}46\cdot10^{-2}$	-
Вал рабочего органа	$7{,}05\cdot10^{-5}$	$1{,}9\cdot10^{6}$
Рабочий орган	0,21	-

Как показали экспериментальные исследования нагрузок в машине МОК-150 [3, 4] на вал рабочего органа машины действует среднемаксимальный момент 9,6 Нм, в соответствии с которым момент, развиваемый электродвигателем с учётом КПД передачи (0,96) и её передаточного числа (0,375) составляет 3,744 Нм.

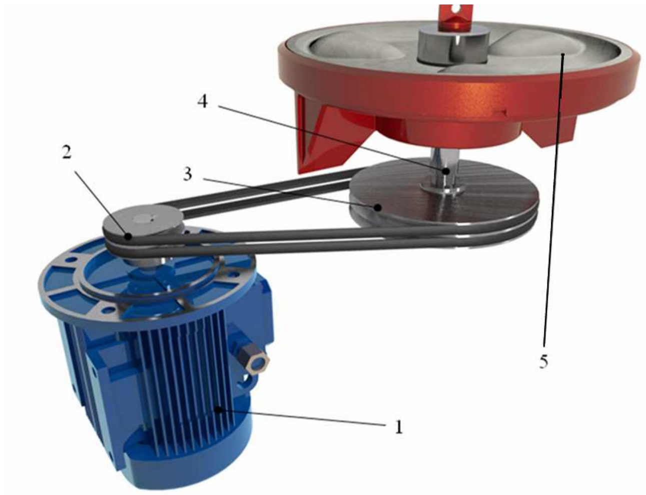


Рис. 1. Механическая часть машины очистки корнеклубнеплодов МОК-150

При работе машины вследствие непостоянства вращающего момента электродвигателя (по синусоидальному закону) в системе возникают крутильные колебания. Рассчитывались максимальные углы закручивания сосредоточенных масс данной динамической системы относительно их устойчивого положения равновесия.

В соответствии с конструкцией машины составлена её полная динамическая модель. Распределённые массы реальной машины заменены сосредоточенными массами, соединёнными между собой безинерционными упругими участками условного вала. При приведении к валу электродвигателя (рис. 2) за первую массу (J_1) принимался ротор электродвигателя, за вторую массу (J_2) – ведущий шкив, за третью (J_3) – ведомый шкив, за четвёртую (J_4) – вал рабочего органа, за пятую (J_5) – тёрочный диск. Момент инерции вала электродвигателя в данной модели распределяется поровну между ротором электродвигателя и ведущим шкивом. При приведении жёсткостей участков вала к валу электродвигателя за жёсткость между первой и второй массой (C_{12}) принимается жёсткость вала электродвигателя. Жёсткость участка между второй и третьей массой (C_{23}) равняется жёсткости клиноременной передачи, жёсткость участка между третьей и четвёртой массой (C_{34}), а так же между четвёртой и пятой массой (C_{45}) равняется половине жёсткости вала рабочего органа.

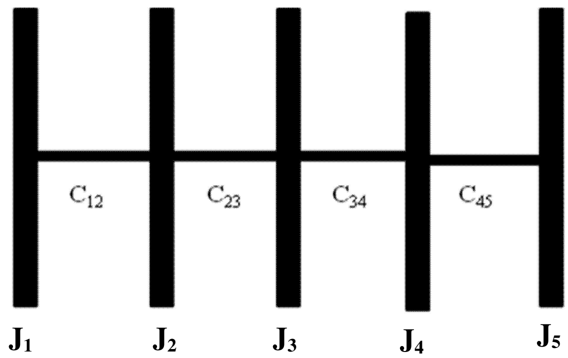


Рис. 2. Динамическая пятимассовая модель машины МОК-150 по крутильным колебаниям

При расчёте крутильных колебаний данной системы для линеаризации задачи малых колебаний в дифференциальных уравнениях движения сохраняются только линейные члены относительно отклонений и скоростей, а члены более высокого порядка отбрасываются. Движение консервативной системы полностью определяется потенциальной (1) и кинетической (2) энергией [5].

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + C_{34}(\varphi_3 - \varphi_4)^2 + C_{45}(\varphi_4 - \varphi_5)^2\right] \quad (1)$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left(I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_2\dot{\varphi}_2^2 + I_3\dot{\varphi}_3^2 + I_4\dot{\varphi}_4^2 + I_5\dot{\varphi}_5^2\right) \quad (2)$$

где φ_i – углы закручивания соответствующих масс относительно положения равновесия.

Звенья рассматриваемого механизма вращаются с разными угловыми скоростями ω. При расчёте крутильных колебаний моменты инерции звеньев механизма приводятся к валу электродвигателя, движущемуся с определённой угловой скоростью (1360 об/мин). Это производится из условия равенства кинетических энергий сосредоточенных масс находящихся на разных валах механизма и кинетических энергий соответствующих звеньев на приведённом валу модели [6].

$$\mathrm{T} = \frac{I_i\omega_i^2}{2} = \frac{I_{i_{пр}}\omega_{i_{пр}}^2}{2} \quad (3)$$

Из зависимости (3) следует, что момент инерции приведённой массы, с учетом передаточного отношения $u = \frac{\omega_i}{\omega_{i_{пр}}}$, равен:

$$I_{iпр} = I_i\left(\frac{\omega_i}{\omega_{i_{пр}}}\right)^2 = I_i u^2 \quad (4)$$

Так из формулы (4) моменты инерции первой и второй масс, находящихся на валу к которому приводится система, не требует умножения на квадрат передаточного отношения $I_1=1{,}3\cdot 10^{-3}$кг/м^2, $I_2=3{,}86\cdot 10^{-4}$кг/м^2. Третья, четвёртая и пятая сосредоточенная массы находятся на валу, частота вращения которого приводится к частоте вращения вала электродвигателя, поэтому их моменты инерции умножаются на квадрат передаточного отношения для сохранения баланса кинетической энергии $I_3=3{,}46\cdot 10^{-3}$кг/м^2, $I_4=9{,}91\cdot 10^{-6}$кг/м^2, $I_5=2{,}95\cdot 10^{-2}$кг/м^2. Моменты инерции сосредоточенных масс приведены в таблице 2.

Аналогичные вычисления проведены относительно приведённых жёсткостей участков вала [6]. Потенциальная энергия при закручивании участков приведённого вала должна быть равна потенциальной энергии при закручивании участков между сосредоточенными массами на разных валах действительного механизма.

Таблица 2
Моменты инерции сосредоточенных масс пятимассовой модели при приведении в валу электродвигателя

№ массы	Состав сосредоточенной массы модели	Приведенный момент инерции, кгм^2
1	Ротор электродвигателя, половина вала электродвигателя	$1{,}3\cdot 10^{-3}$
2	Половина вала электродвигателя, ведущий шкив	$3{,}86\cdot 10^{-4}$
3	Ведомый шкив	$3{,}46\cdot 10^{-3}$
4	Вал рабочего органа	$9{,}91\cdot 10^{-6}$
5	Рабочий орган	$2{,}95\cdot 10^{-2}$

$$\Pi = \frac{C_{i,i+1}(\varphi_{i+1}-\varphi_i)^2}{2} = \frac{C_{i,i+1пр}(\varphi_{i+1}-\varphi_i)^2_{пр}}{2} \tag{5}$$

И учитывая что

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{пр}} = u^2 \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что жесткость приведённого участка вала равна:

$$C_{i,i+1пр} = C_{i,i+1}u^2 \tag{7}$$

Учитывая, что участки между первой и второй массой и между второй и третьей массой находятся на валу, к которому осуществляется приведение, коэффициенты жёсткости не требуют умножения на квадрат передаточного отношения C_{12}=1,9$\cdot 10^4$Нм/рад; C_{23}=4$\cdot 10^3$Нм/рад. Участки между третьей и четвёртой и четвёртой и пятой массами находятся на вале, который приводится, и поэтому их жёсткости умножаются на квадрат передаточного отношения (5) для баланса потенциальной энергии приведенного вала C_{34}=2,7$\cdot 10^5$Нм/рад, C_{45}=2,7$\cdot 10^5$Нм/рад. Данные коэффициенты жёсткости сведены в таблицу 3.

Таблица 3
Коэффициенты жёсткости участков вала пятимассовой модели при приведении к валу двигателя

№ участков	Состав участков вала между сосредоточенными массами	Коэффициент жёсткости, Нм/рад
1-2	Вал электродвигателя	$1{,}9\cdot 10^4$
2-3	Клиноременная передача	$4\cdot 10^3$
3-4	Половина вала рабочего органа	$2{,}7\cdot 10^5$
4-5	Половина вала рабочего органа	$2{,}7\cdot 10^5$

Движение консервативной системы в окрестности устойчивого положения равновесия определяется линейными уравнениями Лагранжа [7].

$$\frac{d}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} \tag{8}$$

При подстановке потенциальной (1) и кинетической (2) энергий в уравнение (8) система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} -J_1\ddot{\varphi}_1 - C_{12}(\varphi_1-\varphi_2)=0 \\ -J_2\ddot{\varphi}_2 + C_{12}(\varphi_1-\varphi_2) - C_{23}(\varphi_2-\varphi_3)=0 \\ -J_3\ddot{\varphi}_3 + C_{23}(\varphi_2-\varphi_3) - C_{34}(\varphi_3-\varphi_4)=0 \\ -J_4\ddot{\varphi}_4 + C_{34}(\varphi_3-\varphi_4) - C_{45}(\varphi_4-\varphi_5)=0 \\ -J_5\ddot{\varphi}_5 + C_{45}(\varphi_4-\varphi_5)=0 \end{cases} \tag{9}$$

Частные решения системы уравнений (8) ищутся в виде:

$$\varphi_i = a_i \sin(kt+\alpha) \tag{10}$$

где k – частота крутильных колебаний;
α – фаза колебаний;
φ_i – угол закручивания i-той массы;
a_i – амплитуда углов закручивания i-той массы.
гармонических колебаний с одной и той же частотой и фазой колебаний.

При подстановке (10) в (9) получаем систему линейных уравнений (11) [8]:

$$\begin{cases} \left(I_1k^2 - C_{12}\right)\, a_1 + C_{12}a_2 = 0 \\ C_{12}a_1 + \left(I_2k^2 - C_{12} - C_{23}\right)\, a_2 + C_{23}a_3 = 0 \\ C_{23}a_2 + \left(I_3k^2 - C_{23} - C_{34}\right)\, a_3 + C_{34}a_4 = 0 \\ C_{34}a_3 + \left(I_4k^2 - C_{34} - C_{45}\right)\, a_4 + C_{45}a_5 = 0 \\ C_{45}a_4 + \left(I_5k^2 - C_{45}\right)\, a_5 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Из системы уравнений (11) получается матрица коэффициентов жёсткостей (12) матрица моментов инерции (13) сосредоточенных масс:

$$C=\begin{bmatrix} -C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & -C_{12}-C_{23} & C_{23} & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & -C_{23}-C_{34} & C_{34} & 0 \\ 0 & 0 & C_{34} & -C_{34}-C_{45} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & -C_{45} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$A = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 \end{bmatrix} \tag{13}$$

В матричной форме система уравнений (9) будет иметь вид:

$$A\ddot{\varphi} + C\varphi = 0 \tag{14}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец обобщённых координат (углов закручивания);
$\ddot{\varphi} = (\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4, \ddot{\varphi}_5)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец обобщённых ускорений.

Система уравнений (11) в матричной форме будет иметь вид:

$$\left(C - k^2 A\right)\, \mu = 0 \tag{15}$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец коэффициентов распределения (относительных амплитуд углов закручивания).

Уравнению (15) можно придать иной вид, умножив его левую часть на матрицу A^{-1}:

$$\left(A^{-1}C - k^2 E\right)\, \mu = 0 \tag{16}$$

где E– единичная матрица того самого порядка, что A и C.

Нетривиальные решения уравнения (15) (16), описывающего свободные колебания рассчитываемой системы, можно получить только для таких значений k, при которых определитель матрицы $(C - k^2 A)$ (или, что эквивалентно, $[A^{-1}C - k^2 E]$) равен нулю [9]. Определитель $\Delta(k^2) = [A^{-1}C - k^2 E]$ является характеристическим определителем системы уравнений свободных колебаний. Раскрытие определителя даёт характеристический многочлен от k^2, степень которого равна порядку системы уравнений. Полученные частоты этих колебаний, подставив в уравнения (15) (16) и решив получившуюся систему однородных линейных алгебраических уравнений, найдём соотношения между компонентами вектора амплитуд. Эта проблема может решаться несколько иным путём для сокращения трудоёмкости расчётов. Используется математическая эквивалентность задачи отыскания частот и форм свободных колебаний механической системы одной из основных задач вычислительной математики: отыскание собственных значений и собственных векторов матрицы. Вектор μ называется собственным вектором квадратной матрицы U, соответствующем собственному значению λ, если он удовлетворяет равенству $U\mu = \lambda\mu$ или

$$\left(U - \lambda E\right)\, \mu = 0 \tag{17}$$

Сопоставление выражений (16) и (17) показывает, что круговая частота свободных колебаний k представляет собой корень квадратный из собственного значения матрицы $A^{-1}C$, а вектор μ задающий форму свободных колебаний, совпадает с собственным вектором этой матрицы. Для решения этой задачи использован пакет математических расчётов Mathcad.

В пакете Mathcad для определения собственных чисел и собственных векторов квадратных матриц имеются встроенные функции [10]. Так для нестандартной задачи на собственные числа $\left(C-k^2A\right)\mu=0$ используются функции *genvals* и *genvecs. Genvals* вычисляет вектор обобщённых собственных чисел. *Genvecs* вычисляет спектр собственных векторов, результат расчёта – матрица, каждый столбец которой соответствует собственному числу. Собственный вектор определяется с точностью до множителя, поэтому, если вектор μ удовлетворяет равенству $U\mu=\lambda\mu$, то вектор $m\mu$ также является собственным вектором матрицы U: $Um\mu=\lambda m\mu$. В данном случае коэффициент m таков, что длинна вектора μ стала равной единице, то есть он ортонормирован.

Амплитуды углов закручивания колебательной системы при вынужденных колебаниях были получены из уравнения (15) при подстановке в него матрицы моментов инерции, матрицы коэффициентов жёсткости и учитывался вектор возмущающих моментов вместо нулей в правой части уравнения для свободных колебаний (18). В данном случае возмущающих моментов два: один прикладывается к ротору электродвигателя, а второй – момент сопротивления продукта при скольжении по рабочему органу (тёрочному диску). Моменты, прикладываемые к остальным массам, принимались как нулевые M=(3,744000 – 9,6), частота вынужденных колебаний равняется 50 Гц – частоте электрического тока сети. Так как возмущающий момент на электродвигателе изменяется по синусоидальному закону с частотой тока электрической сети.

$$a=\left(C-\omega^2A\right)^{-1}M^{\mathrm{T}} \qquad (18)$$

Так для пятимассовой модели при приведении к валу двигателя были получены амплитудно-частотные характеристики крутильных колебаний МОК-150, приведенных в таблице 4.

Таблица 4

Частоты и амплитуды углов закручивания масс собственных и вынужденных колебаний пятимассовой системы при приведении к валу двигателя

№ массы	**Собственные колебания**				**Вынужденные колебания**
	Частоты колебаний, Гц				
	164231	**8536**	**4747**	**1466**	**50**
	Амплитуды углов закручивания для соответствующих частот, рад.				
1	0,0…	0,2446928	-0,1368408	-0,7597271	0,0663366
2	-0,0000006	-0,9692876	0,0731377	-0,6485278	0,0665436
3	0,0014338	0,0221572	0,8980491	0,0020699	0,0675259
4	-0,999999	0,0107518	0,3992232	0,0219065	0,0675604
5	0,0001678	-0,0007118	-0,1002703	0,0417396	0,0675949

Пятимассовая динамическая система была так же приведена и к валу рабочего органа, аналогичным методом находились собственные частоты колебания и амплитуды углов закручивания для них в условных единицах и амплитуды углов закручивания масс для частоты вращения электродвигателя в номинальном режиме.

Рабочий орган машины вращается с меньшей угловой скоростью (510об/мин), чем вал электродвигателя. Поэтому для баланса кинетической энергии вращающихся масс модели по отношению к реальной, моменты инерции четвёртой и пятой массы делятся на квадрат передаточного отношения. Моменты инерции первой второй и третьей массы не требуют коррекции так, как они вращаются на валу рабочего органа, к которому осуществляется приведение. Результаты представлены в таблице 5.

Таблица 5
Моменты инерции сосредоточенных масс пятимассовой модели при приведении к валу рабочего органа

№ массы	Состав сосредоточенной массы модели	Приведенный момент инерции, кгм^2
1	Рабочий орган	0,21
2	Вал рабочего органа	$7{,}05\cdot10^{-5}$
3	Ведомый шкив	$2{,}5\cdot10^{-2}$
4	Половина вала электродвигателя, ведущий шкив	$2{,}75\cdot10^{-3}$
5	Ротор электродвигателя, половина вала электродвигателя	$9{,}26\cdot10^{-3}$

Аналогичные вычисления были произведены относительно коэффициентов жесткостей участков вала при приведении к валу рабочего органа. Так как он вращается медленней, чем вал электродвигателя, жёсткость участка между массами на нём (между четвёртой и пятой массой) делится на квадрат передаточного отношения. Жёсткости участков между первой и второй, второй и третьей, третьей и четвёртой массами остаются без изменения. Значения коэффициентов жесткостей приведены в таблице 6.

Таблица 6
Коэффициенты жёсткости участков вала пятимассовой модели при приведении к валу рабочего органа

№ участков	Состав участков вала между сосредоточенными массами	Коэффициент жёсткости, Нм/рад
1-2	Половина вала рабочего органа	$9{,}5\cdot10^{5}$
2-3	Половина вала рабочего органа	$9{,}5\cdot10^{5}$
3-4	Клиноременная передача	$4{,}1\cdot10^{3}$
4-5	Вал электродвигателя	$1{,}36\cdot10^{5}$

Частоты собственных крутильных колебаний, соответствующие им относительные амплитуды углов закручивания и амплитуды углов закручивания при частоте вращения электродвигателя в номинальном режиме при приведении к валу рабочего органа представлены в таблице 7. Данные параметры определялись так же, как и при приведении динамической системы к валу электродвигателя.

Таблица 7
Частоты и амплитуды углов закручивания масс собственных и вынужденных колебаний пятимассовой системы при приведении к валу рабочего органа

№ массы	**Собственные колебания**				**Вынужденные колебания**
	Частоты колебаний, Гц				
	164231	**8084**	**4659**	**591**	**18,75**
	Амплитуды углов закручивания для соответствующих частот колебаний, рад.				
1	0,0001678	0,000127	-0,1058473	0,036954	-0,0674786
2	-0,999999	-0,0017083	0,4019974	0,034096	-0,0674834
3	0,0014337	-0,0035354	0,9091945	0,0312372	-0,0674883
4	-0,0000001	0,9604696	0,0102029	-0,6973069	-0,0684727
5	0,0…	-0,2783571	-0,0213482	-0,7143242	-0,0685019

Заключение

Сравнивая полученные результаты для модели пятимассовой системы при приведении к валу электродвигателя и при приведении инерционно-жёсткостных параметров к валу рабочего органа можно сделать вывод, что амплитуды углов закручивания соответствующих масс отличаются между собой незначительно, при этом сами принимают малые значения. Они зависят от ряда параметров, в том числе от моментов инерции сосредоточенных масс и от жёсткостей участков вала до сосредоточенной массы и за ней. Расчёты показали, что частоты собственных крутильных колебаний находятся далеко за пределами значения частоты изменения возмущающего момента электродвигателя в номинальном режиме работы. Это свидетельствует об отсутствии возникновения резонансных режимов по крутильным колебаниям.

Перспективы дальнейших исследований крутильных колебаний данного оборудования заключается в расчете касательных напряжений валов при работе машин и выработке рекомендаций по оптимизации конструкции машин.

Список литературы

1. Мальцев А. А. Расчёт в среде Mathcad динамических напряжений в опасном сечении вала шпинделя стана ДУО-160 / А. А. Мальцев // Механическое оборудование металлургических заводов. 2014. – № 3. – С. 64–70.

2. Горбенко А. Н. Анализ причин возникновения крутильных колебаний в турбокомпрессоре судового двигателя / А. Н. Горбенко, М. В. Демьяненко // Рибне господарство України. 2013. – №3. – С. 54–61.

3. Заплетников И. Н. Виброакустика машин очистки корнеклубнеплодов: моногр. / И. Н. Заплетников, Ю. В. Жидков. – Донецк: Норд-Пресс, 2008. – 147с., ил.

4. Заплетников И. Н. Виброакустика оборудования пищевых производств: монография / И. Н. Заплетников. – Харків: Вид-во НТМТ, 2015, – 542с., ил.

5. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1963. – 559 с., ил.

6. Конструирование и расчёт машин химических производств: Учебник для машиностроительных вузов по специальности «Химическое машиностроение и аппаратостроение» / Ю. И. Гусев, Э. Э. Кольман-Иванов и др. – М.: Машиностроение, 1985. – 408 с., ил.

7. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики. Т.2. Динамика: учебник. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 544 с.

8. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

9. Колебания силового агрегата автомобиля / В. Е. Тольский, Л. В. Корчемный, Г. В. Латышев, Л. М. Минкин. – М.: Машиностроение, 1976. – 226с., ил.

10. Макаров Е. Г. Инженерные расчёты в Mathcad. Учебный курс / Е. Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2005. – 448с., ил.

УДК 612.85.012.4
OECD 01.03.AA, 03.01.UM

Моделирование шума импульсных струй вихреразрешающими методами

Волков К.Н.[1], Емельянов В.Н.[2], Цветков А.И.[3], Чернышов П.С.[4]
[1]д.ф.-м.н., в.н.с. кафедры «Плазмогазодинамика и теплотехника»
[2]д.т.н., профессор кафедры «Плазмогазодинамика и теплотехника»
[3]к.т.н., доцент кафедры «Плазмогазодинамика и теплотехника»
[4]Магистрант кафедры «Плазмогазодинамика и теплотехника»
[1,2,3,4]БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, ул. 1-я Красноармейская, д. 1, г. Санкт-Петербург, РФ

Аннотация

Интерес к разработке моделей и методов, направленных на изучение механизмов генерации шума в струйных течениях, объясняется ужесточающимися требованиями по шуму, производимому различными промышленными устройствами, а также возможностями использования звука в техникнологических процессах. Рассматриваются средства вычислительного моделирования задач газовой динамики и аэроакустики, а также обсуждаются источники шума и механизмы генерации шума в сверхзвуковых струйных течениях.

Ключевые слова: шум, аэроакустика, импульсная струя, численное моделирование, метод крупных вихрей.

Modelling impulse flow noise using eddy-resolving methods

Volkov K.N.[1], Emelyanov V.N.[2], Tsvetkov A.I[3], Chernyshov P.C.[4]
[1] D.Sc. in Physics and Mathematics, Leading Researcher of the 'Plasma and gas dynamics and heating engineering' Department
[2] D.Sc. in Engineering, Professor of the 'Plasma and gas dynamics and heating engineering' Department
[3] Ph.D. in Engineering Science, Senior Lecturer of the 'Plasma and gas dynamics and heating engineering' Department
[4] Master's student of the 'Plasma and gas dynamics and heating engineering' Department
[1,2,3,4] BSTU 'VOENMEH' named after D.F.Ustinov, 1 1st Krasnoarmeyskaya street, Saint-Petersburg, Russia

Abstract

Attention to the development of models and methods aimed at studying the mechanisms of noise generation in stream flows is explained by more stringent requirements for the noise produced by various industrial equipment, as well as the possibilities of using sound in technological processes. Computational modelling means for gas dynamics and aeroacoustics problems are considered and also the noise sources and noise generation mechanisms in supersonic stream flows are discussed.

Key words: *noise, aeroacoustics, impulse flow, computational modelling, large eddy method.*

Введение

Сверхзвуковые газовые струи находят широкое применение в промышленных установках и технологических процессах (двигатели, генераторы звуковых сигналов, термоакустическая обработка металлов, порошковая металлургия, сталелитейное производство). Использование дискретного или непрерывного геометрического,

[*]*E-mail: dsci@mail.ru (Волков К.Н.), ve5303@mail.ru (ЕмельяновВ.Н.), acvetkov@yandex.ru (Цветков А.И.), pashachp8@gmail.com (Чернышов П.С.)*

расходного или теплового воздействия на сверхзвуковую струю позволяет изменить режим течения, волновую структуру струи, а также управлять распределениями газодинамических и акустических параметров струи. Сверхзвуковые струи используются в устройствах, построенных на явлении автоколебательного процесса, возникающего при взаимодействии газового потока с трубными полостями (газоструйные излучатели звука). Газоструйные генераторы пульсаций давления находят применение в метрологическом обеспечении систем измерения малых динамических давлений.

Задачи численного моделирования аэроакустики имеют большое практическое значение. Шум – хаотичный набор звуков разной частоты и амплитуды, являющийся для живого организма вредным общебиологическим фактором. Шум может возникать в турбулентном потоке в результате истечения из сопла, течения через различные вентиляторы, несущие винты и каналы, обтекания вокруг твердых поверхностей авиационной и наземной техники, также он может возникать в пограничном слое и вследствие процесса кавитации. Источниками шума, которые могут вредить здоровью человека, зачастую становятся энергетические установки и разрабатываемые новые образцы наземной и воздушной техники, что создает необходимость нахождения методов оценки аэроакустических параметров еще на стадии проектирования. Существенная помощь в решении данной проблемы видится в применении современных решений в области численного моделирования, некоторые из которых позволяют с достаточной точностью спрогнозировать необходимые акустические параметры.

Сверхзвуковая турбулентная струя является сложным источником акустического излучения. Общепринятым считаются три компоненты шума: шум смешения, широкополосный ударно-волновой шум и дискретная составляющая ударного шума. В случае сверхзвуковых струй со скачками уплотнения важную роль играют механизмы излучения шума, связанные с взаимодействием скачков уплотнения и турбулентности в струе. В дополнение к широкополосному излучению звука, в струях со скачками уплотнения появляется тональный шум (screech). При натекании недорасширенной сверхзвуковой струи на цилиндрическую полость внутри полости наблюдается эффект резонансного излучения звука.

Проблема генерации звука турбулентными течениями является одной из важных проблем механики жидкости и газа и аэроакустики. С одной стороны, сложность решения задач аэроакустики связывается с принципиальной нестационарностью механизмов генерации звука, а с другой, с тем, что энергия акустических возмущений составляет порядка 0.01% кинетической энергии турбулентного потока, что усложняет идентификацию механизмов образования шума турбулентными течениями. Сложность расчета уровня шума, генерируемого турбулентными течениями, объясняется необходимостью разрешения широкого спектра турбулентных и акустических масштабов, а также сложностью связи между турбулентностью и производимым ею шумом в дальнем поле.

Результаты экспериментальных и численных исследований свободных сверхзвуковых струй, а также взаимодействия струй с преградами различной формы нашли отражение в большом числе публикаций [1–7]. При истечении из сопла и взаимодействии сверхзвуковой струи с резонирующей полостью возникает сложная система скачков уплотнения, и наблюдаются пространственные осцилляции давления, приводящие к возникновению обратной акустической связи. При малых скоростях истечения струи завихрения, возникающие в слое смешения, являются довольно слабыми, а ось струи остается прямолинейной. При некоторой пороговой скорости истечения струя теряет устойчивость, ее ось искривляется, а амплитуда колебаний увеличивается при удалении от среза сопла. Струя теряет устойчивость под влиянием случайных малых возмущений. Возмущения, возникающие в струе в окрестности кромки сопла, переносятся вниз по потоку и усиливаются, образуя локализованные вихревые структуры. Вихри, взаимодействуя с кромками резонатора, генерируют звуковые возмущения, которые усиливаются резонатором и воздействуют на струю (обратная связь). Определение зон акустического излучения, поиск максимального уровня звукового давления на основной частоте первой моды, а также эмпирических соотношений по определению зон акустического излучения приводит к значительному увеличению объема экспериментальных и численных исследований.

Основными проблемами, решение которых требует дальнейших исследований, являются поиски путей интенсификации смешения при сверхзвуковых скоростях потока и уменьшение уровня шума, генерируемого высокоскоростным потоком. В данной работе проводится вычислительное моделирование газодинамических и акустических характеристик сверхзвуковых струй.

1. Структура сверхзвуковой струи

Свободная сверхзвуковая струя является источником звуковой энергии. Геометрическими параметрами струи выступают диаметр выходного сечения сопла d_a и угол полураствора сопла θ_a. Безразмерными режимными параметрами, определяющими течение в струе в рамках модели невязкого газа, являются: число Маха струи на срезе сопла M_a, отношение удельных теплоемкостей γ, отношение температур торможения газа струи и окружающего пространства T_{0i}/T_∞ и степень нерасчетности $n = p_a/p_\infty$. Для сверхзвуковой струи по степени нерасчетности различают три режима истечения: перерасширенный ($n < 1$), расчетный ($n = 1$), недорасширенный ($n > 1$). Течение в струе условно разбивается на три участка: начальный (газодинамический), переходный, основной. Неравномерность параметров по поперечному сечению струи делает нерасчетные ($n \neq 1$) сверхзвуковые струи на газодинамическом участке наиболее приемлемыми для реализации автоколебательных процессов в трубной полости. Следует отметить, что и в случае расчетной струи, истекающей из конического сопла, реализуются автоколебательные процессы в трубной полости.

Структура газодинамического участка слабонедорасширенной струи представлена на рис. 1. Сверхзвуковая недорасширенная струя идеального газа на начальном участке имеет бочкообразную форму с выпуклостью, обращенной в сторону окружающей среды. Основными элементами струи на этом участке являются: граница струи 1, центральный скачок уплотнения 2 (диск Маха), висячий скачок уплотнения 3, отраженный скачок уплотнения 4, контактная поверхность 5, выходящая из тройной конфигурации скачков уплотнения. На рисунке указаны также положение диска Маха в свободной сверхзвуковой струе l_c и размер первой бочки свободной сверхзвуковой струи l_w. Такая структура струи характерна для степени нерасчетности $n > 1$. При $n < 2$ на газодинамическом участке может существовать несколько бочек струи, висячие скачки при этом отражаются регулярным образом от оси струи (без образования диска Маха). Отражение от оси с образованием диска Маха называется нерегулярным отражением.

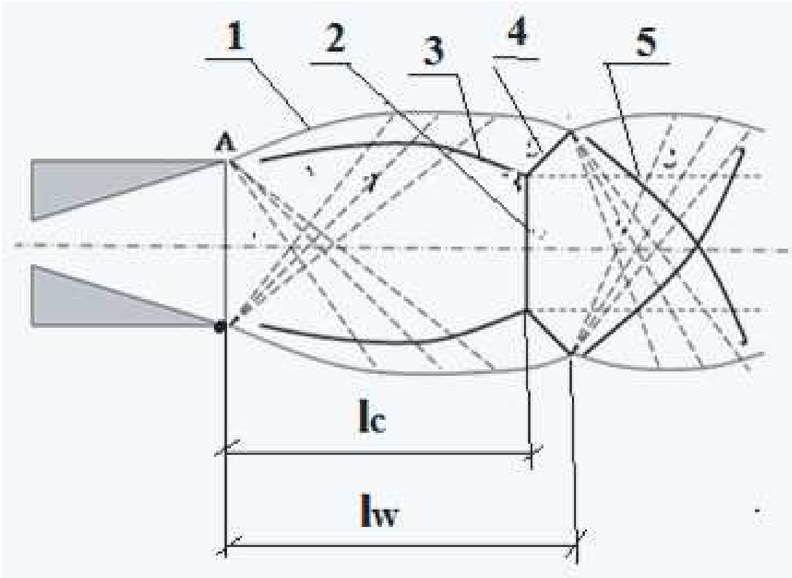


Рис. 1. Структура газодинамического участка недорасширенной струи

2. Источники шума сверхзвуковой струи

Особенности излучения шума сверхзвуковых струй заключаются во взаимодействии скачков уплотнения и турбулентности, в результате которого возникает шум в диапазоне относительно низких частот. Интенсивное дискретное излучение звука, возникающее при возбуждении механизма акустической обратной связи квазипериодической ударно-волновой структурой, составляет основную долю шума сверхзвуковой нерасчетной струи.

Шум смешения образуется в результате турбулентного перемешивания струи с внешней средой. Сдвиговые слои на начальном участке сверхзвуковой струи характеризуются бóльши́ми поперечными градиентами скорости, что приводит к неустойчивости и росту амплитуд гармоник. Вниз по течению толщина сдвиговых слоев увеличивается, а градиент скорости уменьшается, что ведет к затуханию волны. Возрастающая, а затем убывающая амплитуда приводит к широкополосному спектру волновых чисел. В коротковолновом диапазоне этого спектра возможны гармоники со сверхзвуковой фазовой скоростью относительно окружающей среды, которые и являются источником звука. Обычно этот шум разделяется на две компоненты: акустическое излучение от мелкомасштабной турбулентности и акустическое излучение от крупномасштабных турбулентных структур [8]. Крупномасштабные вихревые структуры являются доминирующими источниками, в то время как мелкомасштабные структуры вызывают фоновый шум. Турбулентный шум является низкочастотным и доминирует в диапазоне чисел Струхаля$0.1 < Sh < 0.25$.

Один из основных источников шума в сверхзвуковых струях вызван взаимодействием скачков уплотнения и турбулентности. Широкополосный ударно-волновой шум вызывается взаимодействием распространяющихся вниз по течению турбулентных вихревых структур и квазипериодической (бочкообразной) структуры ударных волн в струе. Описание этого источника шума и соотношения для интенсивности акустического излучения приводятся в работе [9]. Максимум интенсивности широкополосного ударно-волнового шума распространяется в направлении вверх по потоку, а для бóльши́х степеней нерасчетности характерна всесторонняя направленность. Интенсивность широкополосного ударно-волнового шума не зависит от температуры [10].

Другая особенность излучения струй со скачками уплотнения заключается в наличии в спектре шума тональной компоненты (screech, «скрежет»). Доминирующий пик в спектре превосходит шум турбулентного смешения и широкополосный ударно-волновой шум, причиной чего является обратная акустическая связь. На возникновение дискретной составляющей оказывают влияние внешний поток, температура струи, наличия конденсированной фазы в струе и другие факторы [11]. Возмущения, которые появляются вследствие развития гидродинамической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на границе струи у выходного сечения, сворачиваются в вихри и распространяются по потоку с конвективной скоростью v_c. Эти вихри, дойдя до скачка уплотнения в конце первой бочки, имеющей длину L_s, генерируют акустическую волну, которая распространяется к выходному сечению сопла и усиливает начальные возмущения на границе струи. Излучение дискретного тона зависит от длины бочки L_s, скорости звука в окружающем пространстве c_0 и конвективной скорости крупной когерентной структуры v_c. Дискретный тон не испытывает доплеровского смещения (частота не зависит от угла наблюдения).

3. Численное моделирование

Методы расчета шума делятся на две группы: прямые методы и интегральные методы. Прямые методы предполагают совместный расчет генерации звука турбулентными структурами и распространения звуковых волн за пределы турбулентной области вплоть до положения наблюдателя в рамках уравнений газовой динамики. В рамках прямого моделирования приходится использовать протяженные расчетные области и подробные сетки, необходимые для разрешения акустических волн вплоть до положения наблюдателя. Интегральные методы основаны на раздельном расчете генерации шума и его распространения. На первом этапе решаются уравнения газовой динамики, а информация о нестационарных характеристиках потока сохраняется на контрольных поверхностях. На втором этапе информация, сохраненная на контрольных поверхностях, используется для расчета распространения звука до положения наблюдателя с помощью интегральных формул. Интегральные методы позволяют рассчитать акустические характеристики на больши́х расстояниях от источника шума. Наиболее известными интегральными методами являются метод Кирхгоффа и метод Фокса Вильямса–Хоукингса (Ffowcs Williams–Hawkings, FW–H). Основное отличие формулы FW–H от формулы Кирхгоффа заключается в том, что в формуле FW–H учитываются нелинейные слагаемые, что позволяет располагать поверхность интегрирования в областях более высоких уровней шума, где нарушается приближение линейной акустики.

В методах, основанных на акустической аналогии Лайтхилла, используется преобразование уравнений Навье–Стокса к форме неоднородного волнового уравнения. Для получения волнового уравнения, описывающего звуковое поле, вводится контрольная поверхность, охватывающая в каждый момент времени все твердые тела в расчетной области. Решение уравнения FW–H проводится в физическом пространстве. В процессе проведения газодинамического расчета на контрольной поверхности записывается информация о нестационарных газодинамических параметрах потока. Выходными данными являются зависимости акустического давления в заданных точках от времени. Как правило, представляют интерес спектральные характеристики шума. Для определения уровней звукового давления в выбранных точках наблюдения к полученным звуковым сигналам применяется преобразование Фурье по времени и получаются частотные спектры сигналов – зависимости амплитуды от частоты.

Численная реализация метода FW–H состоит в вычислении интегралов при помощи квадратурных формул, интерполяции параметров потока и других функций, входящих в подынтегральные выражения, в точку запаздывания акустического сигнала и вычислении источниковых членов как функции времени. Основу вычислительного алгоритма составляют схемы повышенной точности с определением переменных в узлах неструктурированных сеток с произвольной топологией ячеек, что позволяет моделировать обтекание геометрически сложных объектов [12]. Для пространственной дискретизации используется конечно-объемная схема повышенного порядка точности. Для интегрирования по времени применяется различные явные и неявные схемы, в том числе метод Рунге–Кутты пятого порядка и неявная схема второго порядка на основе линеаризации по Ньютону.

3.1 Моделирование турбулентности

В инженерной практике, зачастую, используются различные акустические модели, позволяющие заметно снизить необходимые для получения результата вычислительные мощности, однако такой подход далеко не всегда может похвастаться высокой точностью, особенно когда необходимо учитывать вклад в акустику различных физических эффектов, таких как отражение от твердых поверхностей, дифракция, резонанс, рассеяние волн и других. На сегодняшний день наивысшая точность акустических параметров численной модели реализуется при использовании прямого расчета акустики, т.е. разрешения масштабов акустических колебаний на всей расчетной области, и метода акустических аналогий, т.е. расчета масштабов акустических колебаний в ближнем поле, с последующим расчетом параметров в дальнем при помощи акустических аналогий.

При этом в процессе моделирования далеко не последнюю роль играет выбор метода моделирования самой турбулентности, среди которых, обычно, выделяют метод прямого численного моделирования (DNS), полуэмпирический метод моделирования, основанный на осредненных уравнениях Навье-Стокса (RANS) и метод крупных вихрей (LES).

Метод прямого численного моделирования предполагает решение трехмерныхнестационарных неосредненных уравнений Навье-Стокса на всех масштабах турбулентности, вплоть до колмогоровского, что, несомненно, обеспечивает наибольшую точность вычислений, однако не позволяет применять данный методмоделирования для решения широкого круга задач, вследствие чересчур больших необходимых вычислительных мощностей.

Метод RANS сегодня наиболее распространен при решении инженерных задач, во многом за счет его малых требований к вычислительным ресурсам, однако он имеет целый ряд существенных недостатков. Современные полуэмпирические модели турбулентности плохо учитывают эффекты трехмерности течения, высокой температуры, сжимаемости, дают менее точные и ограниченные расчетные результаты, чем остальные методы численного моделирования, не являются универсальными для потоков любого вида, в этом методе вводится гипотеза о существовании изотропной турбулентности в каждой точке течения, благодаря чему в данном подходе моделируется весь спектр турбулентных пульсаций, за счет чего не выявляется вихревая структура течения, которая зачастую оказывается крайне важна с практической точки зрения.

В основе метода крупных вихрей лежат два предположения. Одно предположение состоит в возможности разделения поля течения на движение крупных и мелких вихрей. Второе предположение заключается в статистической независимости крупных и мелких вихрей. Метод крупных вихрей осуществляется решением полных уравнений Навье-Стокса с исключением мелкомасштабной турбулентности путем операции фильтрации, то есть в отличие от DNS в методе LES уравнения Навье-Стокса рассчитываются только для крупных вихрей, которые несут в себе максимальные рейнольдсовые напряжения и находятся под прямым воздействием граничных условий. Отфильтрованные мелкие вихри, будучи изотропными и имеющими универсальные характеристики, затем моделируются с использованием специальных подсеточных моделей. Благодаря такому подходу, который изложен выше, метод LES гораздо менее требователен к мощностям вычислительных ресурсов, нежели метод DNS, однако позволяет получить гораздо более точные и богатые результаты (помимо характеристик среднего течения и распределения рейнольдсовых напряжений можно получить спектральные характеристики, двухточечные моменты, временные и пространственные масштабы турбулентности), чем метод RANS, при этом выявляя вихревую структуру течения, что, несомненно, способствует получению качественной численной модели, необходимой для выявления акустических колебаний.

3.2 Постановка задачи

Для реализации метода крупных вихрей с последующим извлечением акустики была выбрана задача истечения импульсной струи из устройства газо-импульсной очистки.

Данное устройство используется для очищения конвективных поверхностей теплообменных аппаратов от зольных отложений и отложений технологического уноса, что является первоочередной задачей в современной промышленности, потому что в настоящее время во всем мире наблюдается тенденция использования низкосортных многозольных топлив. Сущность работы данного устройства состоит в выхлопе продуктов сгорания в зону поверхностей теплообменных аппаратов через сопло в результате сгорания газо-воздушной смеси в специальной импульсной камере, где происходит организация и ускорение процесса взрывного горения газо-воздушной смеси. Решающим фактором в механизме удаления отложений являются волны сжатия, образующиеся при возгорании горючей смеси и выходящие из сопла перед фронтом пламени.

Для получения реальной картины течения был проведен анализ результатов эксперимента на воздушном стенде, где процессы выхода ударной волны и формирования струйного потока были представлены по картине формирования течения за срезом сопла в условиях его запуска в нестационарном режиме при разрыве диафрагмы, установленной в предсопловом объеме. Разрыв диафрагмы происходит при непрерывном повышении давления в предсопловом объеме до достижения 1.2 МПа.

В результате эксперимента получены теневые фотографии, где показана картина течения из сопла в некоторые моменты времени. По представленным фотографиям можно наблюдать распространение пусковой ударной волны от среза сопла. Между волной торможения и пусковой ударной волной видна контактная поверхность, разделяющая истекающий из сопла газ от газа окружающего пространства, сжатого пусковой ударной волной. Начало формирования струи сопровождается образованием у кромки сопла вихревого кольца. Параметры истекающего из сопла потока в зоне разрежения между соплом и волной торможения согласуются с параметрами течения за боковой частью пусковой ударной волны с помощью тангенциальных разрывов и висячих скачков, которые замыкаются на волну торможения. С удалением волны торможения от сопла через некоторое время формируется волновая структура струи, характерная для первой "бочки" сверхзвуковой струи с диском Маха и позднее – с точкой регулярного отражения висячих скачков.Полученные в результате эксперимента картины течения необходимы для оценки соответствия результата численного моделирования и реального истечения. При создании численной модели была построена расчетная область, состоящая из предсоплового пространства, пространства сопла с геометрическим числом Маха 1.5, что соответствует геометрическому числу Маха реального сопла, использовавшегося в эксперименте, и пространства выходной области. Граничные условия, использовавшиеся при расчете, релевантны проведённому эксперименту: в начальный момент времени в предсопловом пространстве создан нормальный газодинамический разрыв, где с одной стороны расположен газ с давлением 1.2 МПа, что позволяет сымитировать процесс запуска пусковой ударной волны с момента разрыва непроницаемой диафрагмы.

3.3 Свободная сверхзвуковая струя

Рассмотрим затопленную сверхзвуковую струю холодного воздуха, истекающую из осесимметричного конического сопла в затопленное пространство. Для формирования сверхзвуковой струи используется осесимметричное коническое сопло с диаметром среза сопла 76.2 мм. Задача решается в осесимметричной постановке, используя координаты(x, r), где x – осевая координата, r – радиальная координата. Линия $r = 0$ соответствует оси симметрии струи в начальный момент времени. Протяженность расчетной области составляет $70d_a$ вниз по потоку, $10d_a$ вверх по потоку, $35d_a$ в радиальном направлении, где d_a – диаметр сопла на срезе.

В расчетах используется гибридная вычислительная сетка, состоящая из треугольных и четырехугольных элементов. Четырехугольные элементы используется внутри сопла и в области истечения струи на расстоянии 20 калибров от среза сопла. Треугольные элементы используются в области дальнего поля. Измельчение сетки вблизи области струйного течения обеспечивает адекватное разрешение волн неустойчивости сдвигового слоя, ударно-волновой структуры, распространение акустических волн в ближнем поле. По направлению к выходным границам проводится огрубление вычислительной сетки (размер крупных ячеек примерно в 25 раз превосходит длину волны).

На первом этапе решения задачи проводится стационарный расчет параметров течения струи. В расчетах используется неявная разностная схема второго порядка для дискретизации по времени и схема MUSCL третьего порядка точности для дискретизации по пространству. Расчет потоков производится на основе схемы Рое. Число Куранта принимается равным 10. Для сходимости стационарной задачи требуется примерно 2000 итераций. На втором этапе нестационарные расчеты проводятся при использовании схемы второго порядка точности по времени. Шаг по времени составляет $5 \cdot 10^{-6}$ с. Значение шага по времени вычисляется на основе данных эксперимента по частотным характеристикам. Для получения осредненных параметров потока и турбулентности, а также для расчета шума набирается статистика, временна́я протяженность которой составляет $300 - 1000\,D_a/U_a$, что соответствует $(3 - 5) \cdot 10^4$ слоев по времени. В задаче рассчитывается 2000 шагов по времени (рассматривается интервал времени от 0 до 0.01 с). Уровни звукового давления вычисляются по нестационарным газодинамическим полям, записанным на конических поверхностях Кирхгоффа, охватывающих струю.

Линии уровня числа Маха приводятся на рис. 2 для различных перепадов давления.

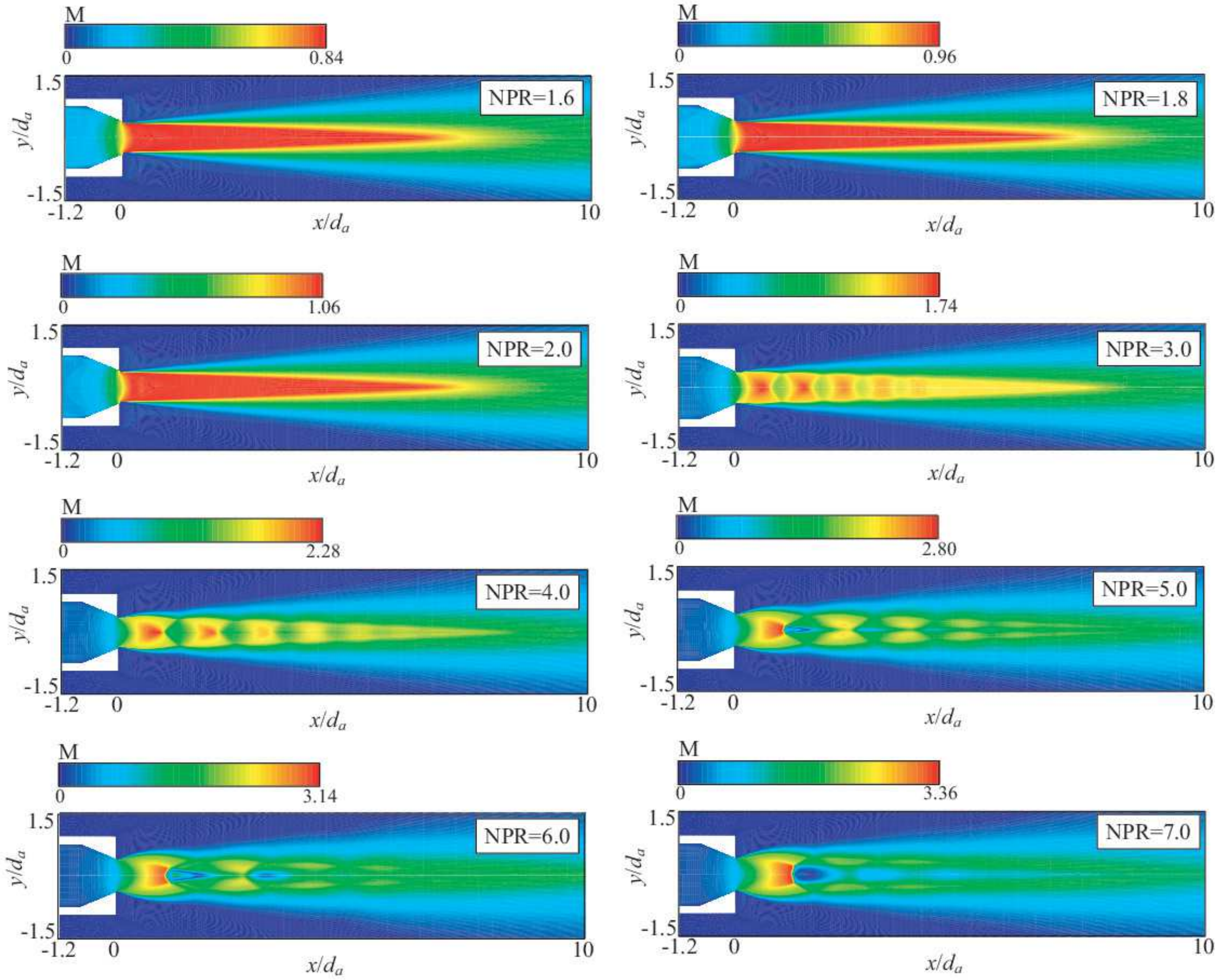


Рис. 2. Линии уровня числа Маха

Газодинамическая структура начального участка струи характеризуется наличием скачков уплотнения, волн разрежения и слоя смешения. Для свободной сверхзвуковой недорасширенной струи реализуется характерная ударно-волновая структура течения, включающая в себя висячий скачок уплотнения, отраженный скачок, диск Маха, границу струи, сдвиговый слой, формирующийся за тройной точкой пересечения скачков. Данные расчетов достаточно хорошо описывают основные особенности стационарной структуры сверхзвуковой неизобарической струи.

Структура струи определяется тем, что в неизобарических струях из-за нерасчетности истечения газ имеет большую скорость в радиальном направлении, что приводит к сложному течению с областями расширения и сжатия, а также с ударными волнами сложной конфигурации. При этом радиальная компонента скорости газа вблизи границы струи оказывается переменной по длине струи и может несколько раз менять свое направление, пока под воздействием эффектов диссипации не станет пренебрежимо малой. Это приводит к тому, что на некотором расстоянии от среза сопла струи образовывается последовательность характерных бочкообразных и приближенно подобных структур, очертания которых, постепенно размываются под воздействием эффектов вязкости в нарастающем вдоль границы струи слое смешения, а также под воздействием волновых потерь.

3.4 Результаты расчетов импульсных струй

В результате численного нестационарного расчета были получены картины течения, по которым хорошо видно развитие импульсной струи (рис.3).

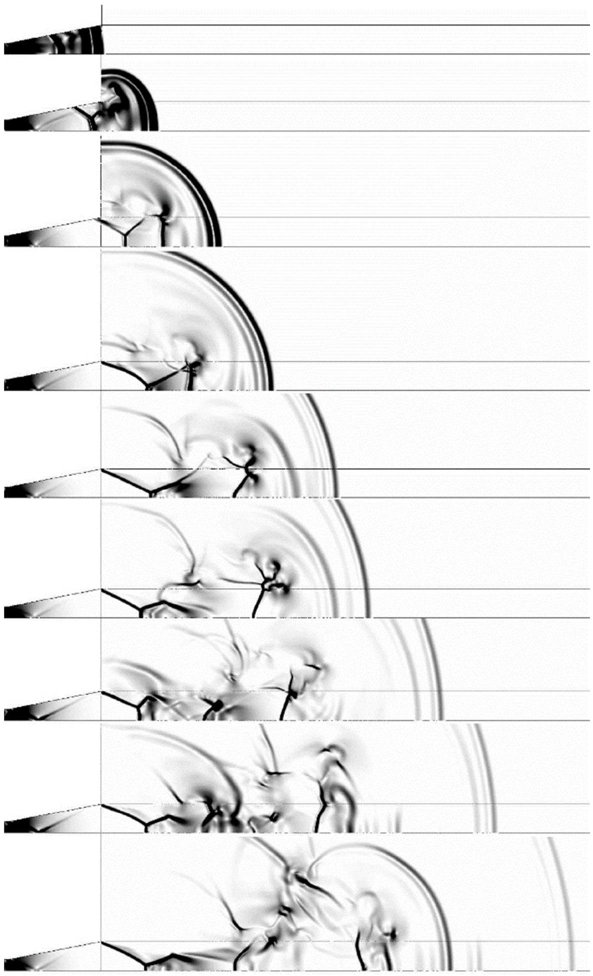


Рис. 3. Развитие импульсной струи во времени

Для наглядного сопоставления полученных результатов, численная модель была визуализирована через градиенты давления, такой выбор обоснован тем, что при создании теневой картины в реальности осуществляется похожий механизм – механизм изменения оптических свойств течения в локальных областях, вследствие изменения его плотности и давления.

Сравнение импульсных струй в некоторый момент времени показало хорошее согласование картин течения модели и натурного образца (рис.4).

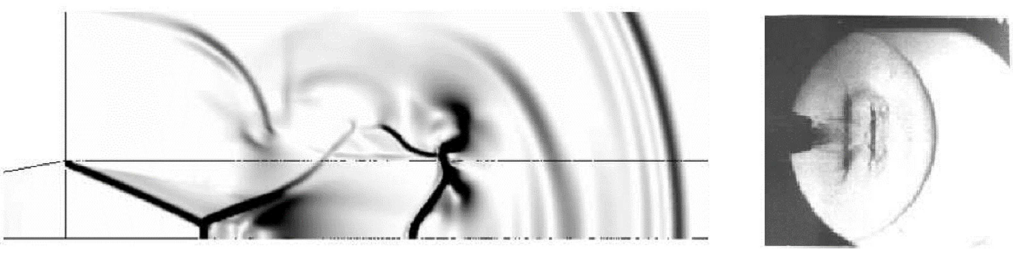


Рис. 4. Сравнение результатов расчета и эксперимента на воздушном стенде

Определение акустических параметров в ближнем поле было решено проводить прямым способом – прямиком из результатов расчета. Использование метода крупных вихрей предполагает использование достаточно подробной пространственно-сеточной структуры, что позволяет уловить акустические колебания без применения дополнительных акустических моделей и эмпирических зависимостей. Для этого было применено быстрое преобразование Фурье, которое позволило получить распределение акустической мощности, уровня звукового давления и других акустических параметров по частотному спектру (рис.5).

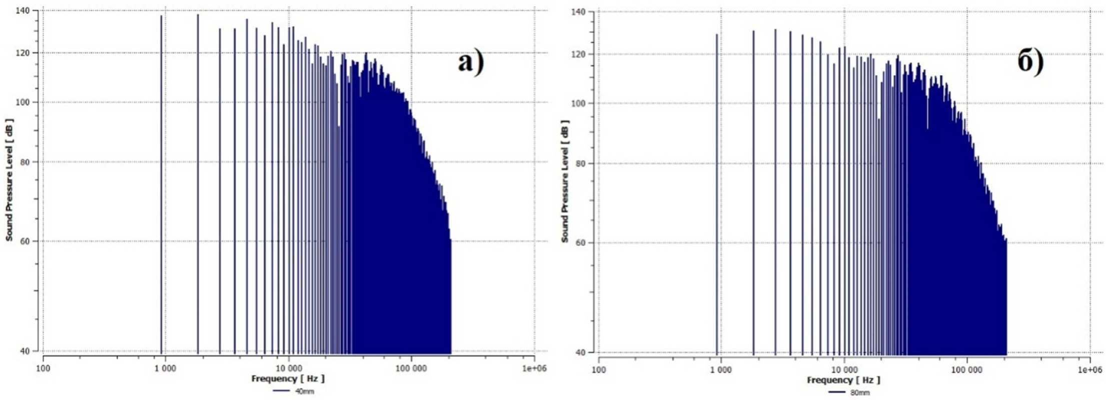


Рис. 5. Распределение уровня звукового давления по частотам (а – 40 мм от оси симметрии, б – 80 мм от оси симметрии)

На рис.5 проиллюстрирован результат, получаемый с использованием метода крупных вихрей – крупномасштабная турбулентность, разрешаемая данным методом, имеет некоторое распределение параметров по частоте, когда как мелкомасштабная турбулентность, исключаемая из решения уравнений Навье-Стокса и моделируемая на подсеточных моделях, «обрезается».

Заключение

Показано влияние нерасчетности на ударно-волновую структуру сверхзвукового участка свободной струи, истекающей из конического сопла, а также распределение параметров вдоль оси струи. Представлены основные параметры струи в широком диапазоне степеней нерасчетности.

Представлены средства вычислительного моделирования задач газовой динамики и аэроакустики, которые представляют собой инструменты решения исследовательских и инженерных задач, а также служат основой разработки новых методов и вычислительных алгоритмов.

Список литературы

1. Дулов В.Г., Лукьянов Г.А. Газодинамика процессов истечения. Новосибирск: Наука, 1984. 236 с.

2. Chin C., Li M., Harkin C., Rochwerger T., Chan L., Ooi A. Investigation of the flow structures in supersonic free and impinging jet flows // Journal of Fluids Engineering. 2013. Vol. 135. No. 3. 031202 (12 pages).

3. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Зазимко В.А. Турбулентные струи: статические модели и моделирование крупных вихрей. М.: Физматлит, 2014. 360 с.

4. Zapryagaev V., Kiselev N., Gubanov D. Shock-wave structure of supersonic jet flows // Aerospace. 2018. Vol. 5. Paper No. 60 (18 pages).

5. Davis T.B., Kumar R. Shear layer characteristics of supersonic free and impinging jets // Shock Waves. 2015. Vol. 25. No. 5. P. 507–520.

6. Mason-Smith N., Edgington-Mitchell D., Buchmann N.A., Honnery D.R., Soria J.Shock structures and instabilities formed in an underexpanded jet impinging on to cylindrical sections // Shock Waves. 2015. Vol. 25. No. 6. P. 611–622.

7. Hildebrand N., Nichols J.W. Simulation and stability analysis of a supersonic impinging jet at varying nozzle-to-wall distances // AIAA Paper. 2015. No. 2015-2212.

8. Tam C.K.W., Auriault L. Jet mixing noise from fine-scale turbulence // AIAA Journal. 1999. Vol. 37. No. 2. P. 145–153.

9. Harper-Bourne M., Fisher M. The noise from shock waves in supersonic jets // AGARD CP. 1973. Vol. 2. No. 131. P. 1–13.

10. Norum T.D., Seiner J.M. Broadband shock noise from supersonic jets // AIAA Journal. 1982. Vol. 20. No. 1. P. 68–73.

11. Alkislar M.B., Krothapalli A.M., Lourenco L. Structure of a screeching rectangular jet: a stereoscopic particle image velocimetry study // Journal of Fluid Mechanics. 2003. Vol. 489. P. 121–154.

12. Volkov K. Multigrid and preconditioning techniques in CFD applications / CFD Techniques and Thermo-Mechanics Applications. Springer International Publishing, 2018. P. 83–149.

УДК 534.23

OECD 01.03.AA

О равнораспределении энергии случайных вибраций и шумов

Казаков Л. И.
К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Тихоокеанский
океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН, г. Владивосток

Аннотация

Приведены экспериментальные и теоретические данные, подтверждающие равнораспределение энергии по степеням свободы для случайных вибраций и шумов. Показаны преимущества возбуждения вибраций судовых конструкций широкополосным воздушным шумом. При этом экспериментально установлено совпадение спектров виброускорений пластин и звуковых давлений шума, что обеспечивает возможность взаимной калибровки акустических приемников. Показано незамеченное ранее равнораспределение кинетической энергии по возбужденным степеням свободы при одиночных ударах по струне, продольному стержню, консоли.

Ключевые слова: случайные вибрации, шумы, собственные колебания тел, равнораспределение энергии, взаимная калибровка звукоприемников.

About equidistribution of energy of random vibrations and noise

Kazakov L.I.
K. F.-M. N., leading researcher, Pacific
Oceanological Institute named after V. I. Il'ichev FEB RAS, Vladivostok 9

Abstract

Experimental and theoretical data confirming the equidistribution of energy by degrees of freedom for random vibrations and noises are presented. The advantages of vibration excitation of ship structures by broadband air noise are shown. Thus experimentally established coincidence of the spectra of vibration accelerations of the plates and the sound pressure of the noise, allowing inter-calibration of acoustic receivers. The previously undetected equidistribution of kinetic energy over excited degrees of freedom is shown for single strikes on a string, a longitudinal rod, and a console.

***Key words**: random vibrations, noises, natural vibrations of bodies, equidistribution of energy, intercalibration of acoustic receivers.*

Введение

Классический закон Больцмана о равнораспределении кинетической энергии тепловых движений по степеням свободы нашел широкое применение как к объектам молекулярных размеров, так и к макроскопическим телам, находящимся в термодинамическом равновесии с газом или жидкостью. Известен, например, замечательный опыт Капплера (1931 г.) по определению значения постоянной Больцмана *k*, основанный на приложении этого закона к термическим флуктуациям в воздушной среде зеркала гальванометра [1, с. 413]. Здесь примечательна «макроскопичность» степени свободы крутильных колебаний зеркальца на кварцевой нити, т.к. несмотря на миниатюрность устройства, оно состоит из огромного числа молекул. На законе равнораспределения основан вывод закона Релея-Джинса в теории электромагнитного теплового излучения абсолютно черного тела, а также закона

E-mail: lev-kazakov@rambler.ru (Казаков Л. И.)

Дюлонга и Пти о теплоемкости твердых тел. Несостоятельность этих классических законов в объяснении явлений при низких температурах и высоких частотах способствовала рождению квантовой механики.

Считать собственные колебания (стоячие волны) электромагнитного поля в зеркально отражающей полости степенями свободы поля предложил Релей (1900 г.) [2, с.83,164]. При этом он исходил из аналогии с колебаниями замкнутой воздушной массы, описанными в его «Теории звука». Позже (1912 г.) это представление применительно к звуковым волнам в твердом теле использовал Дебай в своей теории теплоемкости твердого тела.

Рассматриваемый здесь акустический вариант равнораспределения имеет свои отличия, отмеченные ниже. Автору известны лишь две работы [3,4], где расчеты основаны на предположении о равнораспределении энергии случайных вибраций.

1. Ударное возбуждение вибраций

Корпус реального судна с точки зрения распространения и распределения в нем вибраций представляет собой такую сложную и хаотичную систему, которую практически невозможно рассчитать путем решения дифференциальных уравнений, особенно при сложном силовом воздействии. Ситуация здесь вполне аналогична той, которая имеется, например, в газе, где невозможно проследить за движением отдельных молекул. Но та же аналогия подсказывает путь применения к расчету судовых вибраций методов статистической физики и дает надежду на плодотворность такого подхода.

При возбуждении вибраций молоточковым вибратором 1/3-октавный спектр вибрационных ускорений пластин корабельного корпуса имеет обычно следующие особенности:

- в среднем линейный подъем ~9 дБ/окт в диапазоне частот 0,5 …~5 кГц;
- максимум на частоте ~5 кГц;
- крутой спад в область высоких частот.
- Аналогичный по характеру спектр наблюдается и при возбуждении свободных пластин сериями одиночных ударов.

Наличие в спектре вибраций максимума и последующего высокочастотного спада легко объясняется конечностью времени контакта ударника с пластиной основания. Первая же из указанных особенностей спектра навела на мысль о том, что при широкополосном возбуждении вибрации в пластине должны подчиняться закону равномерного распределения колебательной энергии по степеням свободы, т. е. каждое нормальное колебание должно иметь одну и ту же среднюю во времени и по поверхности пластины кинетическую энергию $\langle\bar{T}\rangle$, Дж. Тогда, умножив эту величину на известное для каждой пластины число нормальных изгибных волн, приходящихся на данную 1/3-октавную полосу частот (см. Приложение), получим полную кинетическую энергию изгибных колебаний пластины в этой полосе. Для прямоугольной пластины, опертой по краям, эту энергию можно вычислить непосредственно, выразив её через среднеквадратичную и усредненную по поверхности пластины скорость колебаний. Таким путем для среднеквадратичного и усредненного по поверхности пластины 1/3-октавного виброускорения $\langle\bar{a}\rangle$, м/с² получим формулу:

$$\langle\bar{a}\rangle = \frac{\omega^{3/2}}{h}\sqrt{\frac{\sqrt{12}\beta\langle\bar{T}\rangle}{\pi\rho_1 c_1}}, \qquad (1)$$

где ω – круговая частота, рад/с; $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega} = 0{,}232 -$ относительная ширина полосы 1/3-октавного фильтра; h – толщина пластины, м; ρ_1 – плотность материала пластины, кг/м³; $c_1 = \sqrt{E/\rho_1(1-\sigma^2)} -$ скорость продольных волн в ней, м/с; E – модуль Юнга, Па; σ – коэффициент Пуассона. Черта сверху означает среднеквадратичное усреднение по времени, скобки – энергетическое усреднение по поверхности пластины.

Величина $\langle\overline{T}\rangle$, вообще говоря, зависит от частоты, поскольку связана со спектральной характеристикой воздействия. Последнее предполагается широкополосным настолько, чтобы $\langle\overline{T}\rangle$ мало изменялась в пределах 1/3-октавной полосы частот. При ударном возбуждении пластин $\langle\overline{T}\rangle$ = *const* в широком диапазоне частот, и формула (1) объясняет наблюдаемый подъем 9 дБ/окт в спектрах вибраций как корабельных, так и одиночных свободно подвешенных пластин. Существеннее, однако, что формула (1) хорошо описывает распределение уровней вибраций в компактных корабельных конструкциях из разных пластин, например, в пластинчатых фундаментах. При этом функция $\langle\overline{T(\omega)}\rangle$ одна и та же для всех пластин данной конструкции. Она является аналогом абсолютной температуры в статфизике и ее удобно назвать «вибратурой».

Поскольку все корабельные пластины обычно стальные, то виброускорения на них согласно (1) обратно пропорциональны толщинам пластин.

На рис. 1 представлены 1/3-октавные спектры вибрационных ускорений $\langle\bar{a}\rangle$ свободно подвешенной стальной пластины. Вибрации пластины возбуждались сериями последовательных ударов в случайных точках поверхности стальным шариком и эбонитовой ручкой.

На рис. 2 показаны спектры уровней $\langle\bar{a}\rangle$ на трех разных стальных пластинах фундамента, возбужденного молоточковым вибратором.

2. Возбуждение вибраций воздушным шумом

Вибрационное поле в корабельной конструкции удобно возбуждать широкополосным воздушным шумом в помещении. Такой способ возбуждения вибраций имеет ряд очевидных преимуществ перед другими и, в первую очередь, в части повышения точности и предсказуемости измерений. При использовании современных звукотехнических средств мощность шумового возбуждения может быть вполне сравнима с мощностью других применяемых источников вибраций.

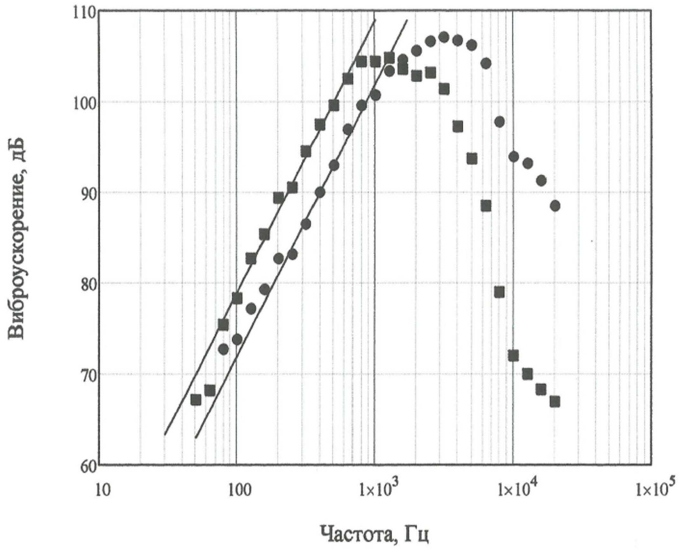


Рис. 1. Виброускорения $\langle \bar{a} \rangle$ стальной пластины размером 1321×713×1,8 мм^3 при ее ударном возбуждении: • – стальным шариком ø 11,1 мм; ▪ – эбонитовой ручкой. Наклон прямых – 9 дБ/окт

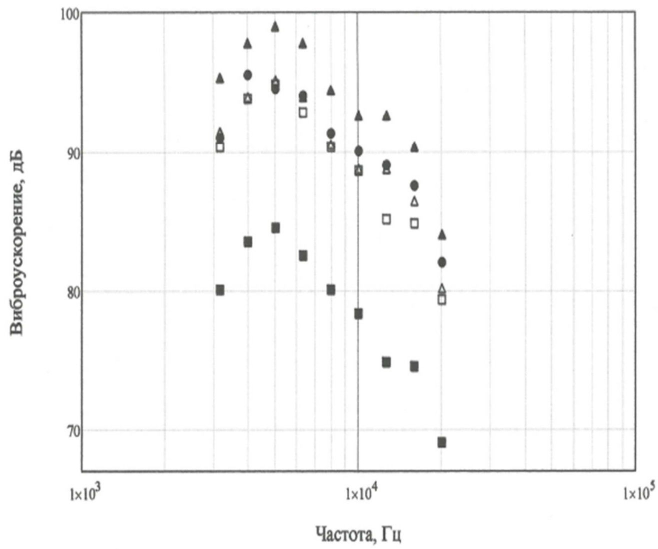


Рис. 2. Спектры вибраций пластин фундамента, возбужденного молоточковым вибратором: ▲ – h = 3,9 мм; • – h = 6,1 мм; ▪ – 20,0 мм; Δ, ▫ – приведение к пластине h = 6,1 мм

Считая справедливым равнораспределение энергии хаотических звуковых колебаний в воздухе помещения по его степеням свободы, получим для среднеквадратичного (и усредненного по объему) звукового давления в 1/3- октавной полосе формулу:

$$\langle \overline{P} \rangle = \omega^{3/2} \sqrt{\frac{\beta\rho\langle \overline{T} \rangle}{\pi^2 c}}, \text{ Па}, \qquad (2)$$

где ρ, кг/м^3 и с, м/с – плотность и скорость звука в воздухе, а функция $\langle \overline{T(\omega)} \rangle$, Дж предполагается той же самой, что и в формуле (1) для пластин, находящихся в помещении и возбуждаемых воздушным шумом.

Таким образом, как следует из формул (1) и (2), 1/3-октавные спектры $\langle\overline{a}\rangle$ и $\langle\overline{P}\rangle$ должны совпадать по форме, что, как показали многие измерения, и имеет место в действительности. При этом должно выполняться равенство

$$\langle\overline{a}\rangle = \sqrt{\frac{\sqrt{12}\pi c}{\rho\rho_1 c_1 h^2}}\langle\overline{P}\rangle, \tag{3}$$

дающее способ взаимной калибровки акселерометров (или приемников колебательной скорости) и микрофонов (гидрофонов). Способ проверен на практике и обладает высокой точностью калибровки (± (0,1…0,2) дБ). Так, на свободно подвешенной в возбуждаемом шумом помещении стальной пластине толщиною h = 4,0 мм измеренное на частоте 3,15 кГц виброускорение составило 0,475 м/с^2, а вычисление по формуле (3) с использованием измеренного значения звукового давления дало 0,479 м/с^2.

Необходимо, однако, сделать существенное уточнение: в объединенной системе «воздушный объем + пластина» равнораспределение кинетической энергии по степеням свободы и воздуха и пластины имеет место лишь на частотах, превышающих критическую частоту пластины [5,с.28]

$$f_{кр} = \frac{\sqrt{3}c^2}{\pi h c_1}, \tag{4}$$

т.е. в условиях, когда пластина способна обмениваться звуковой энергией с окружающей воздушной средой.[1]

На рис. 3 представлены виброускорения вибраций пластинчатого фундамента, возбужденных широкополосным воздушным шумом в помещении.

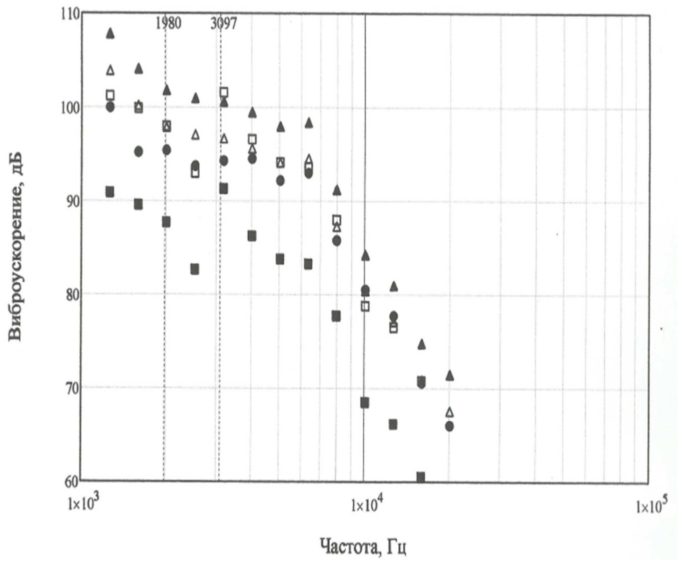


Рис. 3. Уровни виброускорений $\langle\overline{a}\rangle$ на стальных пластинах фундамента при его возбуждении воздушным шумом: ▲ – h = 3,9 мм, $f_{кр}$ = 3,097 кГц; • – h = 6,1 мм, $f_{кр}$ =1,98 кГц; ▪ – h = 20,0 мм, $f_{кр}$ = 0,604 кГц; Δ, ▫ – пересчет на h = 6,1 мм

На рис. 4 показаны измеренные акселерометром уровни виброускорений $\langle\overline{a}\rangle$

[1] Естественно предположить, что шум в помещении, создаваемый вибрациями пластин, тоже связан с ними законом равнораспределения, хотя экспериментально это не проверялось.

на свободно подвешенных пластинах, приведенные к стальной пластине толщиною h = 4,0 мм. Возбуждение вибраций в пластинах осуществлялось широкополосным воздушным шумом в помещении. Кружочками для стальной пластины h = 4,0 мм отмечены предсказанные виброускорения, вычисленные по формуле (3) с использованием результатов измерений конденсаторным микрофоном уровней звукового давления в зашумленном помещении.

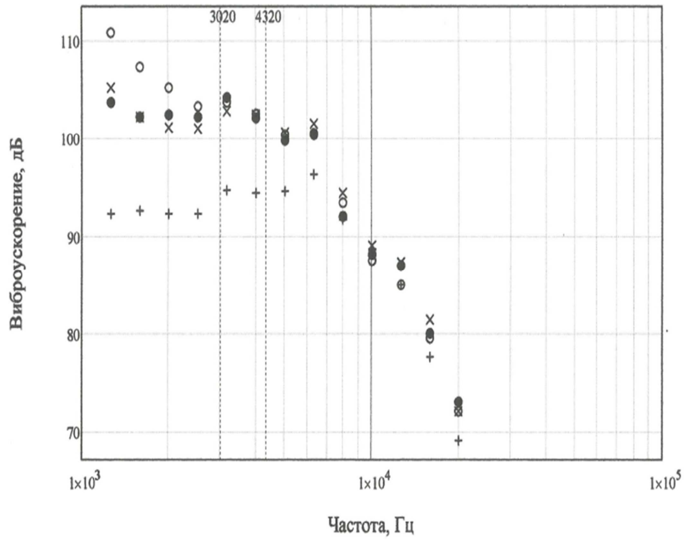


Рис. 4. Виброускорения $\langle \overline{a} \rangle$ на свободно подвешенных в шумном помещении пластинах, приведенные к стальной пластине h = 4,0 мм: • – стальная пластина 1675×300×4,0 мм^3, $f_{кр}$ = 3,02 кГц; ◦ – уровни $\langle \overline{a} \rangle$ для стальной пластины h = 4,0 мм, рассчитанные по формуле (3); × – дюралевая пластина 764×483×2,85 мм^3, $f_{кр}$ = 4,32 кГц; + – стальная пластина 1000×500×1,5 мм^3, $f_{кр}$ = 8,0 кГц

Видно, что на частотах, превышающих критическую для этой пластины частоту $f_{кр}$ = 3,02 кГц, совпадение измеренных и предсказанных значений виброускорений вполне хорошее. Такое совпадение наблюдалось неоднократно, что послужило обоснованием упомянутой выше взаимной калибровки датчиков.

На рисунке 4 также хорошо видно, что равнораспределение для дюралевой пластины справедливо на частотах, превышающих критическую для нее частоту $f_{кр}$ = 4,32 кГц, а для стальной пластины h = 1,5 мм – на частотах, бóльших $f_{кр}$ = 8,0 кГц.

3. Простые примеры

В подтверждение эффекта равнораспределения приведем несколько простых примеров.

3.1. Струна пианино

Длина струны l, м, линейная плотность μ, кг/м, сила натяжения T_0, Н. Если в начальный момент времени t = 0 подвергнуть струну точечному удару в точке x = c, 0 < c < l, сообщив ей импульс силы I, Н·с, то последующие смещения точек струны от положения равновесия примут вид [6, с. 169]:

$$y(x,t) = \frac{2I}{\pi v \mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\frac{\pi mc}{l} \sin\frac{\pi mx}{l} \sin\frac{\pi mvt}{l}, \tag{5}$$

где $v=\sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$, м/с – скорость распространения волн по струне; m – номер гармоники. Используя (5), найдем кинетическую энергию колебаний струны:

$$T(t)=\frac{\mu}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2dx=\frac{I^2}{M}\sum_{m=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi mc}{l}\cos^2\frac{\pi mvt}{l},$$

где M = μl, кг – масса струны. Усредним T(t) по большому времени τ → ∞: $\overline{T(t)}=\lim\limits_{\tau\to\infty}\dfrac{1}{\tau}\int_0^\tau T(t)dt$. Получим:

$$\overline{T(t)}=\frac{I^2}{2M}\sum_{m=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi mc}{l},$$

откуда видно, что средняя по времени кинетическая энергия m-ой гармоники

$$\overline{T_m(t)}=\frac{I^2}{2M}\sin^2\frac{\pi mc}{l}. \tag{6}$$

Если удар пришелся по центру струны c = l/2, то согласно (6) возбудятся только нечетные гармоники и каждая из них приобретет одну и ту же среднюю кинетическую энергию

$$\overline{T_m(t)}=\frac{I^2}{2M}=\text{invar}. \tag{7}$$

Если удар равновероятно приходится на любую случайную точку струны, то из (6) следует:

$$\left\langle\overline{T_m(t)}\right\rangle=\frac{I^2}{4M}=\text{invar}. \tag{8}$$

3.2. Стержень с одним жестко закрепленным (x = 0) и другим свободным (x = l) концом

Продольный удар в начальный момент времени t = 0 в торец свободного конца стержня сообщает ему импульс силы I, Н·с. Используя решения задач в книге [7, с.237,248], найдем продольные смещения в стержне после удара

$$y(x,t)=\frac{8Il}{\pi^2 ES}\sum_{m=1,3,5,\ldots}\frac{1}{m^2}p_m\cdot\sin a_m l\cdot\sin a_m x\cdot\sin p_m t, \tag{9}$$

где E, Па – модуль Юнга материала стержня; S, м² – площадь его поперечного сечения;

$$a_m=\frac{\pi m}{2l};\qquad p_m=\frac{\pi m}{2l}\sqrt{\frac{ES}{\mu}}; \tag{10}$$

μ, кг/м – погонная масса стержня. Возбуждаются только нечетные гармоники, которые на свободном конце имеют пучности колебаний.

С помощью формул (9) и (10) найдем кинетическую энергию колеблющегося стержня:

$$T(t)=\frac{\mu}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2dx=\frac{I^2}{M}\sum_{m=1,3,5,\ldots}\cos^2 p_m t,$$

где M = μl, кг – масса стержня. Отсюда:

$$T_m(t)=\frac{I^2}{M}\cos^2 p_m t$$

и

$$\overline{T_m(t)} = \frac{I^2}{2M} = invar, \qquad (11)$$

т.е. снова на каждую возбужденную ударом гармонику приходится одна и та же средняя по времени кинетическая энергия $I^2/2M$.

3.3. Консоль – стержень, заделанный на одном конце

Поперечный удар по свободному концу сообщает стержню импульс силы I, Н·с и возбуждает поперечные колебания в стержне [8. с. 179–185]:

$$y(x,t) = \frac{I}{\pi\rho lS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(l)\psi_n(x)}{\nu_n}\sin(2\pi\nu_n t), \qquad (12)$$

где ρ – плотность стержня; l – его длина; S – площадь поперечного сечения; $\psi_n(x)$ – фундаментальные функции [8, (15.8)], соответствующие допустимым частотам ν_n [8,(15.7)]:

$$\nu_1 = \frac{0.55966}{l^2}\sqrt{\frac{E\kappa^2}{\rho}},\ \nu_2 = 6{,}267\nu_1,\ \nu_3 = 17{,}548\nu_1,\ \nu_4 = 34{,}387\nu_1,...; \qquad (13)$$

E, Па – модуль Юнга; к, м – радиус инерции поперечного сечения [8, с. 175]. Поскольку согласно (13) обертоны колеблющейся консоли весьма далеки от гармоник, то движение (12) явно не периодическое.

Из (12) следует:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{2I}{\rho lS}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(l)\psi_n(x)\cos(2\pi\nu_n t).$$

Кинетическая энергия колебаний консоли

$$T(t) = \frac{\rho S}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{2I^2}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\cos^2(2\pi\nu_n t), \qquad (14)$$

где M =ρlS, кг – масса стержня.

При выводе (14) учтена ортогональность функций $\psi_n(x)$ и соотношение $\psi_n^2(l) = 2$ [8, (15.9)].

Кинетическая энергия n-го собственного колебания консоли согласно (14) равна:

$$T_n(t) = \frac{2I^2}{M}\cos^2(2\pi\nu_n t).$$

Среднее по времени значение этой энергии составляет

$$\overline{T_n(t)} = \frac{I^2}{M} = invar. \qquad (15)$$

Оно одно и то же для всех собственных колебаний.

Таким образом, удар по концу консоли возбуждает в ней изгибные колебания на всех допустимых (не кратных!) частотах ν_n с одинаковой на каждой частоте средней по времени кинетической энергией, т.е. имеет место равнораспределение энергии по степеням свободы консоли.

Кстати сказать, ни одному из рассмотренных примеров «ультразвуковая катастрофа» не грозит, т.к. реальный удар не может быть точечным ни в пространстве, ни во времени. Поэтому высокие гармоники и обертоны, частоты которых заметно превышают значение 1/τ, где τ – длительность удара, просто не будут возбуждены таким ударом. В этом принципиальное ограничение эффекта равнораспределения: он относится только к основному набору возбужденных собственных колебаний тела.

Было выполнено также теоретическое рассмотрение вынужденных вибраций более сложного объекта – тонкой ограниченной цилиндрической оболочки. Теория колебаний оболочки в качестве частных случаев включает в себя теории продольных, крутильных и изгибных колебаний пластин и стержней – основных составных элементов корпусных конструкций. Из-за конечных размеров оболочки в ней возбуждаются стоячие волны собственных квазипродольных, квазисдвиговых (крутильных) и квазиизгибных колебаний. При этом для случайных вибраций, возбужденных множественными ударами, подтверждена справедливость равнораспределения кинетической энергии по степеням свободы – любым собственным колебаниям оболочки.

Заключение

В статье представлены некоторые теоретические и экспериментальные подтверждения акустического варианта равнораспределения. Он сулит многие применения. Так, на его основе могут быть созданы теория действия одиночных звукопоглотителей в зашумленных помещениях, а также теория одиночных вибропоглотителей (как резонансных, так и широкополосных) для подавления структурного звука. Возможность высокоточной взаимной калибровки акустических датчиков проверена на практике. Формула (3) означает, что можно, например, оценить спектр виброускорений пластины не акселерометром, а микрофоном, измерив им спектр звуковых давлений шума. Можно поступить и наоборот. По разности 1/3-октавных уровней виброускорений на двух разных пластинах можно также, используя формулу (1), определить отношение толщин этих пластин. Таким способом по восьми наиболее совпадающим при приведении данным рис. 3 для стальных пластин h = 3,9 мм и h = 20,0 мм для последней пластины получен весьма близкий результат: h = 20,075 мм.

Классический закон равнораспределения, примененный к макроскопическому телу, относится исключительно к случаям, когда тело находится в состоянии термодинамического равновесия с газом или жидкостью. Так, в теории Дебая о теплоемкости твердого тела (наиболее близкий аналог к нашему случаю) звуковые волны в теле возбуждаются ударами молекул газа (или обусловленными этими ударами флюктуациями давления) и таких ударов невообразимо много. В акустическом же случае равнораспределение наступает, например, всего при десятке ударов шариком по пластине в случайных местах или даже при одном ударе как в «**Простых примерах**». Степенями свободы в акустике служат собственные колебания тел, т. е. стоячие звуковые волны. Каждая такая степень свободы ассоциируется с акустическим резонатором. В отсутствие потерь собственные колебания взаимно ортогональны, а представляющие их резонаторы независимы.

Акустический вариант явления акустикам, видимо, совсем не известен. Ни в одной из множества главных книг по акустике об этом не удалось найти сведений. Нет упоминания о нем и в Справочнике [5]. Поиски в Интернете тоже не дали результатов.

Представляется полезным и интересным дальнейшее детальное изучение равнораспределения акустической энергии, выявление пределов и областей его применения, особенно с учетом вибрационных и звуковых потерь, чего здесь мы не касались.

Приложение

Число собственных изгибных колебаний пластины в полосе частот Δf, Гц [5, с.22]

$$\Delta N = \frac{2\sqrt{3}S}{hc_1}\Delta f, \qquad (\text{П}1)$$

где S, м^2 – площадь пластины. Это верно, если

$$\frac{2\pi f}{c_{изг}} >> \frac{L}{2S},$$

где

$$c_{изг} = \sqrt{\frac{\omega h c_1}{\sqrt{12}}},\ \text{м/с} \ – \qquad (\text{П}2)$$

скорость распространения изгибных волн в пластине; L, м – периметр пластины. Из двух последних выражений следует условие:

$$f >> f_0 = \frac{c_1 h L^2}{16\sqrt{3}\pi S^2},\ \text{Гц}. \qquad (\text{П}3)$$

Теория тонких пластин справедлива, если h << $c_{изг}$ / f, м/с откуда следует необходимость:

$$f << f_1 = \frac{\pi c_1}{\sqrt{3}h}. \qquad (\text{П}4)$$

Практически условия (П3), (П4) всегда выполняются.

Число собственных звуковых колебаний воздушного помещения объемом V в полосе частот Δf [8, с. 430]

$$\Delta N = \frac{4\pi f^2 V}{c^3}\Delta f. \qquad (\text{П}5)$$

Это справедливо для частот $f >> \frac{cA}{8V}$, где A, м^2 – площадь всех стен помещения.

Список литературы

1. Беккер Р. Теория теплоты. / Пер. с нем. М.: Энергия, – 1974. – 504 с.
2. Шёпф Х.-Г. От Кирхгофа до Планка. / Пер. с нем. Под ред. Д.Н. Зубарева. М.: Мир, – 1981. – 192 с.
3. Степанов В.Б., Тартаковский Б.Д. О статистическом методе расчета вибрации сложной конструкции // Акуст. журн. – 1987. – Т. 33.– № 4. – С. 743–750.
4. Степанов В.Б., Тартаковский Б.Д. О статистическом методе оптимизации размещения вибропоглощающего покрытия на сложной конструкции // Акуст. журн. – 1989. – Т. 35. – № 1. – С. 116–121.
5. Справочник по судовой акустике. / Под ред. И.И. Клюкина, И.И. Боголепова. Л.: Судостроение, – 1978. – 422 с.
6. Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. 4-е изд. исправл. и дополн. М.-Л.: ОНТИ, – 1936. – 505 с.
7. Бабаков И.М. Теория колебаний. 2-е изд. перераб. М.: Наука, – 1965. – 560 с.
8. Морз Ф. Колебания и звук. / Пер. с англ. Под ред. С.Н. Ржевкина. М.-Л.: ГИТТЛ, – 1949. – 496 с.

УДК 534.23

OECD 01.03.AA

О равнораспределении энергии случайных вибраций в ограниченной оболочке

Казаков Л.И.*
К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН, г. Владивосток

Аннотация

Рассмотрены вынужденные вибрации тонкой ограниченной цилиндрической оболочки, возбуждаемые произвольными силами. Из-за конечных размеров оболочки в ней устанавливаются стоячие волны собственных квазипродольных, квазисдвиговых (крутильных) и квазиизгибных колебаний. Каждое такое колебание ассоциируется с сосредоточенным акустическим резонатором. Получены простые приближенные формулы для собственных частот резонаторов. Расчетом установлено равнораспределение кинетической энергии колебаний по степеням свободы – собственным колебаниям оболочки при её возбуждении множественными ударами. При стационарных случайных вибрациях равнораспределение справедливо для собственных колебаний оболочки с близкими частотами.

Ключевые слова: ограниченная оболочка, вибрации, собственные колебания, акустические резонаторы, резонансные частоты, равнораспределение энергии случайных вибраций.

About equidistribution energy of random vibrations in a limited shell

Kazakov L. I.
K. F.-M. N., leading researcher, Pacific
Oceanological Institute named after V. I. Il'ichev FEB RAS, Vladivostok

Abstract

Forced vibrations of a thin bounded cylindrical shell excited by arbitrary forces are considered. Due to the finite size of the shell, standing waves of proper quasi-longitudinal, quasi-shear (torsional) and quasi-flexural oscillations are established in it. Each such oscillation is associated with a concentrated acoustic resonator. The simple approximate formulas for the natural frequencies of the resonators are obtained. The calculation established the equidistribution of the kinetic energy of oscillations in degrees of freedom – its natural vibrations of the shell when it is excited by multiple strikes. For stationary random vibrations equidistribution is true for the natural oscillations of the shell with close frequencies.

Key words*: limited shell, vibrations, natural oscillations, acoustic resonators, resonant frequencies, equidistribution of random vibration energy.*

Введение

В статистической физике есть знаменитый закон Больцмана о равнораспределении кинетической энергии тепловых движений по степеням свободы тел [1, с. 149], [2, с.456]. Этот удивительный закон «обладает огромным диапазоном применения» [3, с. 172]. Например, ему подвержены не только молекулы газа, но и зеркальце гальванометра (макроскопический объект!), совершающее броуновское «дрожание» под ударами этих молекул [4, с. 46], [5, с. 413] (что позволило найти значение постоянной Больцмана k).

E-mail: lev-kazakov@rambler.ru (Казаков Л.И.)

Рэлей был первым (1900 г.), кто отождествил собственные колебания тела (стоячие волны) с его степенями свободы [6, с. 83, 164]. Дебай использовал (1912 г.) такое представление применительно к звуковым волнам в твердом теле при создании теории его теплоемкости [7, с. 436]. Классическое приближение этой теории, приводящее к закону Дюлонга и Пти, как раз и состоит в утверждении справедливости закона Больцмана в акустике – по крайней мере, в акустике твердого тела. Ибо возбуждение в последнем акустических волн ударами молекул окружающего газа ничем не отличается от ударов твердыми шариками, каковыми и представляют молекулы в кинетической теории газа.

Между тем вопрос об акустической применимости закона равнораспределения в литературе совсем не разработан и практически даже не упоминается. Найдены лишь две статьи, где расчеты базируются на предположении о справедливости этого закона [8], [9].

К закону Больцмана, конечно, много претензий [10, с. 197]. Может быть поэтому и сам закон именуют по-разному. «Законом» его называют, например, в учебниках [1], [2], [10]. Другие называют это «теоремой о равнораспределении» [3], [4], [7]. Рэлей предпочитал определение «доктрина Максвелла – Больцмана» [6, с. 88]. Ключевым в этих определениях является слово “равнораспределение”. Так и будем далее называть это яркое явление физики.

Цель статьи: получить прямым расчетом равнораспределение по степеням свободы энергии случайных вынужденных вибраций в ограниченной цилиндрической оболочке.

1. Основной расчет

Оболочку будем считать замкнутой, круглой с радиусом срединной поверхности R, ограниченной длины L, малой толщины $h << R$. Совместим срединную поверхность оболочки с координатной поверхностью $\rho = R$ цилиндрической системы координат (ρ, φ, z). Края оболочки прямые, лежат в координатных плоскостях $z = 0$, $z = L$ и свободно оперты на неподвижные жесткие опоры. Рассмотрим воздействие на такую оболочку динамических нагрузок, произвольно распределенных по её поверхности.

Колебания оболочки будем описывать полученной В.З. Власовым [11] системой трех дифференциальных уравнений относительно смещений точек срединной поверхности в осевом (U_1), окружном (U_2) и радиальном (U_3) направлениях:

$$\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - L_{11}U_1 - L_{12}U_2 - L_{13}U_3 = \frac{1}{m_1 c_1^2}P_1,$$

$$\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - L_{21}U_1 - L_{22}U_2 - L_{23}U_3 = \frac{1}{m_1 c_1^2}P_2, \qquad (1)$$

$$-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} - L_{31}U_1 - L_{32}U_2 - L_{33}U_3 = -\frac{1}{m_1 c_1^2}P_3,$$

где L_{ij} – симметричная матрица линейных дифференциальных операторов:

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}; \quad L_{22} = \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2};$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial z \partial s}; \quad L_{23} = L_{32} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{3-\sigma}{2} R a^2 \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial s}; \tag{2}$$

$$L_{13} = L_{31} = \frac{\sigma}{R}\frac{\partial}{\partial z} - R a^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} - \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^3}{\partial z \partial s^2} \right); \; L_{33} = a^2 \left(R^2 \nabla^2 \nabla^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{R^2} \right) + \frac{1}{R^2};$$

$$a^2 = \frac{h^2}{12R^2}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}; \quad \nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4}{\partial s^4}; \quad s = R\varphi;$$

$c_1 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho_1 (1-\sigma^2)}}$, м/с – скорость продольных волн в пластине, выполненной из материала оболочки с плотностью ρ_1, кг/м^3, модулем Юнга E, Па и коэффициентом Пуассона σ; $m_1 = \rho_1 h$, кг/м^2 – поверхностная плотность оболочки; $P_{1,2,3} = P_{1,2,3}(z,\varphi,t)$, Н/м^2 – компоненты вектора внешних сил, приложенных к единице площади срединной поверхности оболочки, соответственно, в осевом (P_1), окружном (P_2) и радиальном (P_3) направлениях.

Условия свободного опирания краев оболочки означают равенство нулю при $z = 0$, L нормальных сил $N_1(\varphi)$, изгибающих моментов $M_1(\varphi)$, окружных $U_2(\varphi)$ и радиальных $U_3(\varphi)$ смещений, т.е.

$$N_1(\varphi) = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\sigma}{R}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} - U_3 \right) \right] = 0,$$

$$M_1(\varphi) = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{R^2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial \varphi^2} \right) = 0,$$

$$U_2(\varphi) = 0, \quad U_3(\varphi) = 0.$$

Эти граничные условия доставляют, по-видимому, единственную до сего времени возможность точного решения системы уравнений (1).

Следуя С.П. Тимошенко [12, с. 462], будем решать задачу методом разделения переменных, положив:

$$(U_1 / P_1)(\varphi, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(U_1^{pm} / P_1^{pm} \right)(t) \cos\frac{\bar{p}z}{R}\cos m\varphi,$$

$$(U_2 / P_2)(\varphi, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(U_2^{pm} / P_2^{pm} \right)(t) \sin\frac{\bar{p}z}{R}\sin m\varphi, \tag{3}$$

$$(U_3 / P_3)(\varphi, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(U_3^{pm} / P_3^{pm} \right)(t) \sin\frac{\bar{p}z}{R}\cos m\varphi,$$

где

$$\bar{p} = \frac{\pi R}{L} p, \tag{4}$$

$$P_1^{pm}(t) = \frac{\varepsilon_m}{\pi L}\int_0^L \int_0^{2\pi} P_1(z,\varphi,t)\cos\frac{\bar{p}z}{R}\cos m\varphi dz d\varphi,$$

$$P_2^{pm}(t) = \frac{\varepsilon_m}{\pi L}\int_0^L\int_0^{2\pi} P_2(z,\varphi,t)\sin\frac{\bar{p}z}{R}\sin m\varphi dz d\varphi, \quad (5)$$

$$P_3^{pm}(t) = \frac{\varepsilon_m}{\pi L}\int_0^L\int_0^{2\pi} P_3(z,\varphi,t)\sin\frac{\bar{p}z}{R}\cos m\varphi dz d\varphi,$$

ε0 = 1,   εm = 2,   m = 1, 2, … ,

Подставив ряды (3) в систему уравнений (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, придем к системе неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций времени $U_{1,2,3}^{pm}(t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{R^2}{c_1^2}\frac{d^2U_1^{pm}}{dt^2} + a_{11}U_1^{pm} + a_{12}U_2^{pm} + a_{13}U_3^{pm} = \frac{R^2}{m_1c_1^2}P_1^{pm},\\
&\frac{R^2}{c_1^2}\frac{d^2U_2^{pm}}{dt^2} + a_{21}U_1^{pm} + a_{22}U_2^{pm} + a_{23}U_3^{pm} = \frac{R^2}{m_1c_1^2}P_2^{pm},\\
&\frac{R^2}{c_1^2}\frac{d^2U_3^{pm}}{dt^2} + a_{31}U_1^{pm} + a_{32}U_2^{pm} + a_{33}U_3^{pm} = \frac{R^2}{m_1c_1^2}P_3^{pm},
\end{aligned} \quad (6)$$

где

$$a_{11} = \bar{p}^2 + \frac{1-\sigma}{2}m^2, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{1+\sigma}{2}\bar{p}m,$$

$$a_{13} = a_{31} = -\bar{p}\left[\sigma + a^2\left(\bar{p}^2 - \frac{1-\sigma}{2}m^2\right)\right], \quad a_{22} = \frac{1-\sigma}{2}\bar{p}^2 + m^2, \quad (7)$$

$$a_{23} = a_{32} = m\left(1 + \frac{3-\sigma}{2}a^2\bar{p}^2\right), \qquad a_{33} = 1 + a^2\left[\left(\bar{p}^2 + m^2\right)^2 - 2m^2 + 1\right].$$

Пока будем считать m ≥ 1, когда ε_m = 2. Осесимметричный случай m = 0 обсудим отдельно.

Рассмотрим случай нулевых начальных условий, когда компоненты внешней нагрузки $P_{1,2,3}$ и смещения $U_{1,2,3}$ (3) как функции времени t равны нулю при t < 0. Будем считать эти функции абсолютно интегрируемыми и представимыми в виде интеграла Фурье. Такими же свойствами, очевидно, будут обладать и функции времени $U_{1,2,3}^{pm}(t)$ и $P_{1,2,3}^{pm}(t)$. Применив к обеим частям каждого из уравнений (6) одностороннее преобразование Фурье [13, с.173]

$$U_{1,2,3}^{pm}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U_{1,2,3}^{pm}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \quad U_{1,2,3}^{pm}(\omega) = \int_0^{\infty} U_{1,2,3}^{pm}(t)e^{i\omega t}dt, \quad (8)$$

$$P_{1,2,3}^{pm}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_{1,2,3}^{pm}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \quad P_{1,2,3}^{pm}(\omega) = \int_0^{\infty} P_{1,2,3}^{pm}(t)e^{i\omega t}dt,$$

где i – мнимая единица, ω, рад/с – круговая частота, придем к системе неоднородных алгебраических уравнений относительно комплексных спектров (точнее – спектральных плотностей) $U_{1,2,3}^{pm}(\omega)$, м·с функций времени $U_{1,2,3}^{pm}(t)$, м:

$$(a_{11}-\Omega^2)U_1^{pm}+a_{12}U_2^{pm}+a_{13}U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\,2}}P_1^{pm},$$

$$a_{21}U_1^{pm}+(a_{22}-\Omega^2)U_2^{pm}+a_{23}U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\,2}}P_2^{pm}, \tag{9}$$

$$a_{31}U_1^{pm}+a_{32}U_2^{pm}+(a_{33}-\Omega^2)U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\,2}}P_3^{pm},$$

где

$$\Omega=\frac{\omega R}{c_1}. \tag{10}$$

В правых частях уравнений (9) стоят спектральные плотности $P_{1,2,3}^{pm}(\omega)$, Н·с/м^2 функций времени (5).

Решения системы (9) даются формулами Крамера, которые приводят к выражениям:

$$U_j^{pm}(\Omega)=\frac{R^2}{m_1c_1^{\,2}D(\Omega^2)}\sum_{l=1}^{3}Q_{jl}(\Omega^2)P_l^{pm}(\Omega),\ \text{j = 1,2,3}, \tag{11}$$

где

$$D(\Omega^2)=-\Omega^6+b_1\Omega^4-b_2\Omega^2+b_3\ - \tag{12}$$

определитель системы (9),

$$b_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$b_2=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}^{\,2}-a_{13}^{\,2}-a_{23}^{\,2}, \tag{13}$$

$$b_3=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}a_{23}^{\,2}-a_{22}a_{13}^{\,2}-a_{33}a_{12}^{\,2};$$

$$Q_{11}(\Omega^2)=\Omega^4-(a_{22}+a_{33})\Omega^2+a_{22}a_{33}-a_{23}^{\,2},$$

$$Q_{22}(\Omega^2)=\Omega^4-(a_{11}+a_{33})\Omega^2+a_{11}a_{33}-a_{13}^{\,2},$$

$$Q_{33}(\Omega^2)=\Omega^4-(a_{11}+a_{22})\Omega^2+a_{11}a_{22}-a_{12}^{\,2},$$

$$Q_{12}(\Omega^2)=Q_{21}(\Omega^2)=a_{12}\Omega^2+a_{13}a_{23}-a_{12}a_{33}, \tag{14}$$

$$Q_{13}(\Omega^2)=Q_{31}(\Omega^2)=a_{13}\Omega^2+a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22},$$

$$Q_{23}(\Omega^2)=Q_{32}(\Omega^2)=a_{23}\Omega^2+a_{12}a_{13}-a_{23}a_{11}.$$

Определитель (12) представим в виде

$$D(\Omega^2)=-(\Omega^2-\lambda_1^2)(\Omega^2-\lambda_2^2)(\Omega^2-\lambda_3^2),$$

где $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ – корни кубического относительно Ω^2 уравнения $D(\Omega^2) = 0$, которые следует считать действительными и однократными [11, с. 214]. В соответствии с формулами Виета справедливы соотношения:

$$b_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad b_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2, \quad b_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2. \tag{15}$$

Если (при $m \neq 0$)

$$\gamma = \frac{b_2{}^2}{b_1 b_3} >> 1, \tag{16}$$

то, используя формулы Виета (15), можно показать, что меньший из корней уравнения $D(\Omega^2) = 0$ (пусть это будет $\lambda_3{}^2$) приближенно равен

$$\lambda_3^2 \approx \frac{b_3}{b_2}\left(1 + \frac{1}{\gamma - 2}\right), \tag{17}$$

а два других корня

$$\lambda_{1,2}^2 \approx \frac{1}{2}\left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2 + \frac{2b_2}{\gamma}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} - \lambda_3^2\right). \tag{18}$$

Для достаточно тонких оболочек условие (16) обычно всегда выполняется. При этом формулы (17), (18) для корней λ_r^2 справедливы с хорошим приближением (< 0,1%).

При $\bar{p}^2 + m^2 >> 1$ отсюда следует:

$$\lambda_3^2 \approx a^2\left[(\bar{p}^2 + m^2)^2 - 2m^2 + 1\right] + \frac{(1-\sigma^2)\bar{p}^4}{(\bar{p}^2 + m^2)^2}, \qquad a^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \tag{19}$$

$$\lambda_1^2 \approx \bar{p}^2 + m^2 + 1 - \frac{\lambda_3^2}{2}, \qquad \lambda_2^2 \approx \frac{1-\sigma}{2}(\bar{p}^2 + m^2) - \frac{\lambda_3^2}{2}.$$

Если $a(\bar{p}^2 + m^2) >> 1$, то $\lambda_3 \approx a(\bar{p}^2 + m^2)$.

Разложим правильные несократимые дроби, входящие в формулу (11), на элементарные дроби:

$$\frac{Q_{jl}(\Omega^2)}{D(\Omega^2)} = \sum_{r=1}^{3} \frac{Q_{jl}(\lambda_r^2)}{D'(\lambda_r^2)} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \lambda_r^2}, \tag{20}$$

где

$$D'(\lambda_r^2) = \left.\frac{dD(\Omega^2)}{d\Omega^2}\right|_{\Omega^2 = \lambda_r^2} = -3\lambda_r^4 + 2b_1\lambda_r^2 - b_2. \tag{21}$$

С помощью формул (14) и (21) легко также установить, что

$$-D'(\Omega^2) = Q_{11}(\Omega^2) + Q_{22}(\Omega^2) + Q_{33}(\Omega^2). \tag{22}$$

Подставив выражения (20) и (22) в формулу (11), окончательно найдем:

$$U_j^{pm}(\Omega)=\frac{R^2}{m_1c_1{}^2}\sum_{l=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\frac{A_{jlr}P_l^{pm}(\Omega)}{\lambda_r^2-\Omega^2},\ \text{j = 1,2,3,} \tag{23}$$

где

$$A_{jlr}=A_{jlr}(p,m,\frac{R}{L},a^2,\sigma)=\frac{Q_{jl}(\lambda_r^2)}{Q_{11}(\lambda_r^2)+Q_{22}(\lambda_r^2)+Q_{33}(\lambda_r^2)},\qquad \text{p,m = 1,2,…,}\infty. \tag{24}$$

В симметричном случае (при m = 0) будет:

$$U_2\equiv 0,\ U_1=U_1(z,t),\ U_3=U_3(z,t),\ P_2^{p0}(t)=0\,;$$

согласно формулам (7)

$$a_{12}^0=a_{21}^0=a_{23}^0=a_{32}^0=0;$$

$$a_{11}^0=\overline{p}^2;\quad a_{33}^0=1+a^2(1+\overline{p}^4); \tag{25}$$

$$a_{13}^0=a_{31}^0=-\overline{p}(\sigma+a^2\overline{p}^2).$$

Формулы (23) можно распространить на осесимметричный случай m = 0, если считать:

$$A_{2lr}=A_{j2r}=A_{jl2}=0;\quad -A_{131}=A_{133}=-A_{311}=A_{313}=\frac{a_{13}^0}{\lambda_{03}^2-\lambda_{01}^2}; \tag{26}$$

$$A_{111}=A_{333}=\frac{\lambda_{03}^2-a_{11}^0}{\lambda_{03}^2-\lambda_{01}^2};\quad A_{113}=A_{331}=\frac{\lambda_{03}^2-a_{33}^0}{\lambda_{03}^2-\lambda_{01}^2};\quad \lambda_1^2=\lambda_{01}^2;\quad \lambda_3^2=\lambda_{03}^2,$$

где

$$\lambda_{01}^2=\frac{1}{2}\left(a_{33}^0+a_{11}^0-\sqrt{\left(a_{33}^0-a_{11}^0\right)^2+\left(2a_{13}^0\right)^2}\right), \tag{27}$$

$$\lambda_{03}{}^2=\frac{1}{2}\left(a_{33}^0+a_{11}^0+\sqrt{\left(a_{33}^0-a_{11}^0\right)^2+\left(2a_{13}^0\right)^2}\right).$$

При $\overline{p}^2 \ll 1$ (L>>R) из формул (27) и (25) следует:

$$\lambda_{01}\approx\overline{p}\sqrt{1-\sigma^2};\quad \lambda_{03}\approx 1,$$

откуда, учитывая (10) и (4), найдем резонансные частоты осесимметричных колебаний протяженной оболочки:

$$f_1^{p0}=\frac{pc_1\sqrt{1-\sigma^2}}{2L}=\frac{p}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho_1}}, \tag{28}$$

$$f_3^{p0}=\frac{c_1}{2\pi R}=\frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{E}{\rho_1(1-\sigma^2)}}. \tag{29}$$

Частоту, определяемую формулой (29), называют кольцевой, т.к. с ней происходят свободные синфазные радиальные колебания оболочки как кольца. При этом по окружности оболочки укладывается одна длина волны продольных колебаний в пластине. На резонансной частоте f_1^{p0} (28) по длине оболочки укладывается p продольных полуволн в стержне.

Формулы (23) позволяют полностью решить задачу о вынужденных колебаниях свободно опертой по краям оболочки под действием сил, произвольно распределенных по ее поверхности и действующих в произвольных направлениях. Для получения окончательных результатов необходимо по найденным значениям спектральных плотностей $U_j^{pm}(\omega)$ вычислить функции времени $U_j^{pm}(t)$ с помощью преобразования Фурье (8), подставить эти функции в правые части выражений (3) и выполнить суммирование рядов.

2. Эквивалентные резонаторы

Представим формулы (23) в более привычном для акустика виде, перейдя от волновых параметров $\Omega = \omega R / c_1$ к частотам ω и от спектров смещений к спектрам скоростей

$$V_j^{pm}(\omega) = -i\omega U_j^{pm}(\omega).$$

Таким путем из (23) получим:

$$V_j^{pm}(\omega) = \sum_{r=1}^{3} V_{jr}^{pm}(\omega),$$

$$V_{jr}^{pm}(\omega) = \frac{1}{i\omega m_1} \cdot \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2} P_{jr}^{pm}(\omega)}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}} = Y(\omega, \omega_{pmr}) P_{jr}^{pm}(\omega), \tag{30}$$

где при $m \neq 0$ в соответствии с соотношением (24)

$$P_{jr}^{pm}(\omega) = \sum_{l=1}^{3} A_{jlr} P_l^{pm}(\omega) = \frac{Q_{j1}(\lambda_r^2) P_1^{pm}(\omega) + Q_{j2}(\lambda_r^2) P_2^{pm}(\omega) + Q_{j3}(\lambda_r^2) P_3^{pm}(\omega)}{Q_{11}(\lambda_r^2) + Q_{22}(\lambda_r^2) + Q_{33}(\lambda_r^2)}, \tag{31}$$

при m = 0

$$P_{jr}^{p0}(\omega) = \sum_{l=1}^{3} A_{jlr} P_l^{p0}(\omega),$$

а величины A_{jlr} даются выражениями (26);

$$Y(\omega, \omega_{pmr}) = \frac{1}{i\omega m_1} \cdot \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}} - \tag{32}$$

проводимость сосредоточенного акустического резонатора, представляющего собственное колебание оболочки с резонансной круговой частотой

$$\omega_{pmr} = \frac{\lambda_r(p, m)}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho_1 (1 - \sigma^2)}}. \tag{33}$$

Например, при $a(\overline{p}^2 + m^2) >> 1$ согласно формул (19) $\lambda_3(p, m) \approx a(\overline{p}^2 + m^2)$ и по формуле (33) найдем собственные частоты квазиизгибных колебаний оболочки

$$f_{pm3} = \frac{(\overline{p}^2 + m^2)h}{2\pi R^2}\sqrt{\frac{E}{12\rho_1(1-\sigma^2)}}. \tag{34}$$

Это совпадает с выражением для собственных частот поперечных колебаний прямоугольной пластинки со сторонами L и πR, свободно опертой по всем краям [14, с. 301]. Плотность собственных частот в этом случае дается асимптотической формулой:

$$\frac{dN(f_{pm3})}{df_{pm3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi RL}{hc_1}. \tag{35}$$

Таким образом, отклик оболочки на произвольные воздействия – это сумма откликов множества независимых акустических резонаторов типа (30), причем каждому сочетанию чисел p и m при m ≠ 0 соответствуют три, а при m = 0 – два резонатора.

Комплексные спектры (30) компонентов колебательной скорости pmr-го резонатора определяют через интеграл Фурье (8) временны́е отклики $V_{jr}^{pm}(t)$ резонатора на произвольные воздействия $P_{jr}^{pm}(t)$. Используя (3), вычислим кинетическую энергию pmr-го резонатора оболочки:

$$T_{pmr}(t) = \frac{m_1 R}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\Big\{\left[V_{1r}^{pm}(t)\right]^2\cos^2\frac{\overline{p}z}{R}\cos^2 m\varphi + \left[V_{2r}^{pm}(t)\right]^2\sin^2\frac{\overline{p}z}{R}\sin^2 m\varphi + \tag{36}$$

$$\left[V_{3r}^{pm}(t)\right]^2\sin^2\frac{\overline{p}z}{R}\cos^2 m\varphi\ \Big\}dzd\varphi = \frac{M}{4\varepsilon_m}\sum_{j=1}^{3}\left[V_{jr}^{pm}(t)\right]^2,$$

где

$$\text{M} = 2\pi\text{RLm}_1 - \tag{37}$$

масса оболочки, кг.

Средняя по времени кинетическая энергия резонатора равна по определению

$$\overline{T_{pmr}(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T T_{pmr}(t)dt = \frac{M}{4\varepsilon_m}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\sum_{j=1}^{3}\left[V_{jr}^{pm}(t)\right]^2\right\}dt. \tag{38}$$

3. Точечные силы

Рассмотрим случай, когда на оболочку действуют N_k зависящих от времени сил, приложенных в произвольных точках (z_k,φ_k):

$$\vec{F}_k(t) = F_k(t)\left(\cos\gamma_{1k}\cdot\vec{e}_1 + \cos\gamma_{2k}\cdot\vec{e}_2 + \cos\gamma_{3k}\cdot\vec{e}_3\right), \tag{39}$$

где cos γ_{jk} – направляющие косинусы вектора k-ой силы; $\vec{e}_1 = \vec{e}_z$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_\rho$ – орты по координатным осям. В этом случае

$$P_j(z,\varphi,t) = \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N_k}F_k(t)\cos\gamma_{jk}\delta(z-z_k)\delta(\varphi-\varphi_k), \tag{40}$$

где δ – символ δ – функции. Подставив эти выражения в формулы (5) и найдя функции $P_j^{pm}(t)$, используем их для вычисления с помощью преобразования Фурье (8) спектров $P_j^{pm}(\omega)$ этих функций. Последнее сведется к вычислению спектров функций $F_k(t)$

$$F_k(\omega) = \int_0^{\infty} F_k(t) e^{i\omega t} dt. \tag{41}$$

Теперь представим, что силы $F_k(t) \geq 0$ – это весьма короткие импульсы произвольной формы и малой длительности τ_k, такой, что $\omega\tau_k \ll 1$, т. е. имеет место ударное возбуждение оболочки. В этом случае из (41) получим

$$F_k(\omega) \approx \int_0^{\tau_k} F_k(t) dt = I_k, \tag{42}$$

где I_k, Н·с – импульс силы $F_k(t)$, Н. Такой процесс напоминает залп бомбардировки тела молекулами газа. Найденные спектры $P_j^{pm}(\omega)$ подставим в формулу (31) и далее в (30), чтобы получить спектры $V_{jr}^{pm}(\omega)$ компонентов колебательной скорости pmr-го резонатора, а по ним найти и сами временны́е отклики $V_{jr}^{pm}(t)$ этого резонатора. При этом придется вычислить интеграл [15, с. 421, 10]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\omega e^{-i\omega t}}{\omega_{pmr}^2 - \omega^2} d\omega = -2\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{\omega_{pmr}^2 - \omega^2} d\omega = \pi \cos \omega_{pmr} t. \tag{43}$$

Используя результаты (42), (43), окончательно получим:

$$V_{jr}^{pm}(t) = \frac{\varepsilon_m \cos \omega_{pmr} t}{M \sum_{i=1}^{3} Q_{ii}(\lambda_r^2)} \sum_{k=1}^{N_k} I_k \left\{ Q_{j1}(\lambda_r^2) \cos \gamma_{1k} \cos \frac{\bar{p} z_k}{R} \cos m\varphi_k + \right.$$

$$\left. + Q_{j2}(\lambda_r^2) \cos \gamma_{2k} \sin \frac{\bar{p} z_k}{R} \sin m\varphi_k + Q_{j3}(\lambda_r^2) \cos \gamma_{3k} \sin \frac{\bar{p} z_k}{R} \cos m\varphi_k \right\}. \tag{44}$$

Подставив это в формулу (38), найдем

$$\overline{T_{pmr}(t)} = \frac{\varepsilon_m \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{N_k} I_k \{\ldots\} \right)^2}{8M \left[Q_{11}(\lambda_r^2) + Q_{22}(\lambda_r^2) + Q_{33}(\lambda_r^2) \right]^2}, \tag{45}$$

где фигурная скобка – та же, что и в (44).

Будем считать, что точки приложения сил случайны и равномерно распределены по поверхности оболочки. Усреднение по этим точкам обозначим скобками

$$\langle \ldots \rangle = \frac{1}{2\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \ldots dz_k d\varphi_k. \tag{46}$$

Все направления действия сил считаем равновероятными, что дает среднее значение $\langle \cos^2 \gamma_{jk} \rangle = 1/3$. Проведя такие усреднения в формуле (45), получим:

$$\left\langle \overline{T_{pmr}(t)} \right\rangle = \frac{\varepsilon_m \sum_{k=1}^{N_k} I_k^2}{96M} \sum_{j=1}^{3} \frac{Q_{j1}^2(\lambda_r^2) + Q_{j2}^2(\lambda_r^2) + Q_{j3}^2(\lambda_r^2)}{\left[Q_{11}(\lambda_r^2) + Q_{22}(\lambda_r^2) + Q_{33}(\lambda_r^2)\right]^2}. \tag{47}$$

Рассмотрим выражение

$$\psi^{pm}(\Omega^2) = \sum_{j=1}^{3} \frac{Q_{j1}^2(\Omega^2) + Q_{j2}^2(\Omega^2) + Q_{j3}^2(\Omega^2)}{\left[Q_{11}(\Omega^2) + Q_{22}(\Omega^2) + Q_{33}(\Omega^2)\right]^2}. \tag{48}$$

Его можно представить в виде

$$\psi^{pm}(\Omega^2) = 1 + \frac{2J_2(\Omega^2)}{J_1^2(\Omega^2)}, \tag{49}$$

где

$$J_1 = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}, \tag{50}$$

$$J_2 = Q_{12}{}^2 + Q_{13}{}^2 + Q_{23}{}^2 - Q_{11}Q_{22} - Q_{11}Q_{33} - Q_{22}Q_{33}.$$

Используя формулы (12) – (14), найдем:

$$\begin{aligned} Q_{11}(\Omega^2)Q_{22}(\Omega^2) - Q_{12}^2(\Omega^2) &= D(\Omega^2)(a_{33} - \Omega^2), \\ Q_{11}(\Omega^2)Q_{33}(\Omega^2) - Q_{13}^2(\Omega^2) &= D(\Omega^2)(a_{22} - \Omega^2), \\ Q_{22}(\Omega^2)Q_{33}(\Omega^2) - Q_{23}^2(\Omega^2) &= D(\Omega^2)(a_{11} - \Omega^2), \end{aligned} \tag{51}$$

откуда с учетом выражений (50) и (13) получим:

$$J_2(\Omega^2) = D(\Omega^2)(3\Omega^2 - b_1). \tag{52}$$

Поскольку значения $\Omega^2 = \lambda_r^2$ являются корнями уравнения $D(\Omega^2) = 0,$ то согласно формулам (51), (52) и (49) для всех pmr-резонаторов (при m ≠ 0) справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} Q_{12}^2(\lambda_r^2) &= Q_{11}(\lambda_r^2)Q_{22}(\lambda_r^2), \\ Q_{13}^2(\lambda_r^2) &= Q_{11}(\lambda_r^2)Q_{33}(\lambda_r^2), \\ Q_{23}^2(\lambda_r^2) &= Q_{22}(\lambda_r^2)Q_{33}(\lambda_r^2), \end{aligned} \tag{53}$$

$$J_2(\lambda_r^2) = 0, \tag{54}$$

$$\psi^{pm}(\lambda_r^2) = 1. \tag{55}$$

При m = 0 ($\varepsilon_0 = 1$) соотношение (55) тоже выполняется, поскольку

$$\psi^{p0}(\lambda_r^2) = \sum_{j=1,3} \left(A_{j1r}^2 + A_{j3r}^2\right) = A_{11r}^2 + A_{13r}^2 + A_{31r}^2 + A_{33r}^2$$

и, как легко установить с помощью формул (25) – (27),

$$\psi^{p0}(\lambda_{01}^2) = \psi^{p0}(\lambda_{03}^2) = 1. \tag{56}$$

Итак, соотношение (55) справедливо для всех резонаторов оболочки, отвечающих любым сочетаниям чисел p = 1, 2, … ∞; m = 0, 1, 2, … ∞; r = 1, 2, 3, т.е. для любых частот и форм собственных колебаний. Оно выполняется независимо от того, какая именно теория оболочек используется, т. к. при выводе (55) не потребовались сведения о конкретном строении коэффициентов $a_{ij}(p,m)$ (10), отражающих особенности симметричной матрицы линейных дифференциальных операторов L_{ij} (2) системы разрешающих уравнений (1) теории оболочек. В сущности, найденные соотношения (53) – (55) – это только свойства решений системы алгебраических уравнений (9) с симметричными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}$ и с правыми частями.

На основании формул (48), (55), (56) из (47) окончательно найдем:

$$\left\langle \overline{T_{pmr}(t)} \right\rangle = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} I_k^2}{48M} = \text{invar}. \tag{57}$$

Таким образом, при залповом ударном возбуждении ограниченной оболочки распределение энергии колебаний равномерно по всем возбужденным степеням свободы. Положение не изменится, если удары будут неодновременны, что легко показать.

Природа волновых степеней свободы такова, что каждая точка оболочки одновременно принадлежит всем резонаторам. Поэтому даже один удар в любом месте оболочки возбуждает сразу все её собственные колебания, но в разной степени: наибольший отклик дадут те из них, для которых место удара совпадет с пучностью колебаний и возбуждения вовсе не случится, если удар придется на узел колебаний. Применение же множественных разнонаправленных и равномерно распределенных по поверхности оболочки ударов дает путем усреднения (46) результат (57). При этом число ударов N_k не обязательно должно быть чрезмерно большим.

Если возбуждение оболочки представляет собой стационарный случайный процесс, то средняя энергия резонатора (38) не зависит от времени и в силу теоремы А.Я. Хинчина [16, с.164]

$$\overline{T_{pmr}(t)} = \frac{\pi n_1 RL}{2\varepsilon_m} \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=1}^{3} G_{Vjr}^{pm}(\omega) \right\} d\omega. \tag{58}$$

где $G_{Vjr}^{pm}(\omega)$, м^2/с – энергетический спектр процесса $V_{jr}^{pm}(t)$, м/с.

Энергетические спектры откликов $G_{Vjr}^{pm}(\omega)$ и возбуждающих резонатор сил $G_{Pjr}^{pm}(\omega)$ связаны известным соотношением [17, с.374]:

$$G_{Vjr}^{pm}(\omega) = \left| Y(\omega, \omega_{pmr}) \right|^2 G_{Pjr}^{pm}(\omega). \tag{59}$$

Здесь (в отличие от (32)) учтем диссипацию механической энергии в материале оболочки, задав модуль Юнга в комплексном виде $E(1 - i\eta)$, где $\eta = \eta(\omega)$ – коэффициент внутренних потерь, который в силу принципа причинности [18] должен быть нечетной функцией частоты, т. е.

$$\eta(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{pmr}} \delta(\omega), \quad \delta(-\omega) = \delta(\omega) << 1.$$

Поэтому

$$Y(\omega,\omega_{pmr}) = \frac{1}{i\omega m_1}\cdot\frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}-i\dfrac{\omega}{\omega_{pmr}}\delta(\omega)}. \qquad (60)$$

Подставив выражения (59) и (60) в формулу (58), найдем:

$$\overline{T_{pmr}(t)} = \frac{\pi RL}{2\varepsilon_m m_1\omega_{pmr}^2}\int\limits_0^\infty \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}\right)^2+\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}\delta^2(\omega)}\left\{\sum_{j=1}^{3}G_{Pjr}^{pm}(\omega)\right\}d\omega. \qquad (61)$$

Если процесс $P_{jr}^{pm}(t)$ широкополосен в сравнении с резонатором, то в (61) можно вынести из-под знака интеграла спектральную плотность. Тогда, считая, что наблюдение ведется в охватывающей собственную частоту резонатора ω_{pmr} полосе частот $\Delta\omega$ с центральной частотой $\omega_0 \approx \omega_{pmr}$, достаточно узкой по сравнению с шириной спектра воздействия, но намного превышающей ширину резонансной кривой, и учитывая, что [15, с. 312, 3.257]

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2+x^2\delta^2}dx = \frac{\pi}{2\delta},$$

найдем:

$$\overline{T_{pmr}(\Delta\omega,t)} = \frac{\pi^2 RL\sum\limits_{j=1}^{3}\overline{\left[P_{jr}^{pm}(\Delta\omega,t)\right]^2}}{4\varepsilon_m m_1\omega_0^2\delta(\omega_0)\beta}, \qquad (62)$$

где $\beta = \Delta\omega/\omega_0$ – относительная ширина частотной полосы наблюдения.

Отсюда видно, что все сводится к вычислению суммы средних квадратов компонентов возбуждающих резонатор сил, пропущенных через полосовой фильтр $\Delta\omega$.

Силами, возбуждающими pmr-й резонатор, являются в согласии с (30) функции времени $P_{jr}^{pm}(t)$, получающиеся обращением по Фурье соотношений (31). Последние и представят эти функции при замене аргументов ω на t. При этом функции $P_l^{pm}(t)$, входящие в числитель, будут выражаться формулами (5) через силы $P_l(z,\varphi,t)$ (40), непосредственно приложенные к оболочке. Для средних квадратов компонентов возбуждающих резонатор сил найдем

$$\overline{\left[P_{jr}^{pm}(t)\right]^2} = \frac{\varepsilon_m^2}{\pi^2R^2L^2\left[\sum\limits_{i=1}^{3}Q_{ii}(\lambda_r^2)\right]^2}\sum_{k=1}^{N_k}\overline{F_k^2(t)}\Bigg[Q_{j1}^2(\lambda_r^2)\cos^2\gamma_{1k}\cos^2\frac{\overline{p}z_k}{R}\cos^2 m\varphi_k +$$

$$Q_{j2}^2(\lambda_r^2)\cos^2\gamma_{2k}\sin^2\frac{\overline{p}z_k}{R}\sin^2 m\varphi_k + Q_{j3}^2(\lambda_r^2)\cos^2\gamma_{3k}\sin^2\frac{\overline{p}z_k}{R}\cos^2 m\varphi_k + \qquad (63)$$

+ сумма знакопеременных перекрестных членов].

Выполнив подобно предыдущему примеру в формуле (63) усреднение (46) по случайным и равновероятным точкам приложения и направлениям сил (39), а также учитывая результаты (55), (56), найдем:

$$\sum_{j=1}^{3}\left\langle\left[P_{jr}^{pm}(t)\right]^2\right\rangle = \frac{\varepsilon_m \sum_{k=1}^{N_k}\overline{F_k^2(t)}}{6\pi^2 R^2 L^2}.$$

Подставив это в (62), окончательно получим:

$$\left\langle\overline{T_{pmr}(\Delta\omega,t)}\right\rangle = \frac{\sum_{k=1}^{N_k}\overline{F_k^2(\Delta\omega,t)}}{24RLm_1\omega_0^2\delta(\omega_0)\beta} = \frac{\pi G_F(\omega_0)}{12M\omega_0\delta(\omega_0)}, \tag{64}$$

где

$$G_F(\omega_0) = \frac{\sum_{k=1}^{N_k}\overline{F_k^2(\Delta\omega,t)}}{\Delta\omega} -$$

энергетический спектр суммарного силового воздействия на оболочку, ограниченный полосой $\Delta\omega$.

Полоса частот $\Delta\omega$ может быть относительно узкой, т. е. $\beta << 1$. Однако при достаточно высоких частотах в эту полосу попадет множество ΔN собственных частот $\omega_{pmr} \approx \omega$ резонаторов оболочки, отвечающих самым разным наборам чисел p, m, r и представляющих всевозможные формы собственных колебаний оболочки (квазипродольные, крутильные, квазиизгибные). Например, для стальной оболочки размерами $L = \pi R$, $R = 1$м, $h = 0{,}004$ м = 4 мм при $c_1 = 5400$ м/с, $p = m = 40$, $a(p^2 + m^2) = 3{,}7 >> 1$, $\beta = 0{,}1$ по формулам (34), (35) найдем: $f_{pm3} = 3176$ Гц, $\Delta f = 318$ Гц, $\Delta N = 503$. Формула (64) устанавливает равенство средних кинетических энергий всех таких собственных колебаний с близкими частотами и служит, таким образом, доказательством и формулировкой равнораспределения случайных вибраций в оболочках ограниченной длины при стационарном возбуждении. Это можно назвать «равнораспределением в малом», поскольку оно не столь «всеобъемлюще» как (57). Возможно, так происходит из-за того, что при наличии потерь резонаторы уже не вполне взаимонезависимы, между ними происходит обмен энергией и, видимо, имеет место перекачка энергии по спектру в сторону более низкочастотных резонаторов, меньше поглощающих энергию.

Заключение

Доказано прямым расчетом равнораспределение кинетической энергии по всем возбужденным собственным колебаниям любых форм цилиндрической оболочки конечной длины при её ударном возбуждении. Это верно для широкого спектра резонансных частот, ограниченного лишь условием $\omega_{pmr}\tau_k << 1$. При стационарных случайных вибрациях оболочки равнораспределение справедливо для собственных колебаний с близкими частотами независимо от их форм.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. 3-е изд. дополн. М.: Наука, 1976. – 583 с.

2. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Том 1. Теория электромагнитного поля. Теория относительности. Статистическая физика. М.: ГИФМЛ, 1962. – 695 с.

3. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики. М.: Наука, 1973. – 423 с.

4. Фейнман Р., Лейтон Р.,Сэндс *М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып.4. Кинетика. Теплота. Звук. М.: Мир, 1965. – 261 с.

5. Беккер Р. Теория теплоты. / Пер. с нем. М.: Энергия, 1974. – 504 с.

6. Шёпф Х.-Г. От Кирхгофа до Планка. / Пер. с нем. Под ред. Д.Н. Зубарева. М.: Мир, 1981. – 192 с.

7. Дебай П. Избранные труды. Статьи 1909 – 1965. Л.: Наука, 1987. – 559 с.

8. Степанов В.Б., Тартаковский Б.Д. О статистическом методе расчета вибрации сложной конструкции. // Акуст. журн. – 1987. – Т. 33. – № 4. – С.743–750.

9. Степанов В.Б., Тартаковский Б.Д. О статистическом методе оптимизации размещения вибропоглощающего покрытия на сложной конструкции. // Акуст. журн. – 1989. – Т. 35. – № 1. – С. 116–121.

10. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. 2-е изд. испр. и дополн. М.: Наука, 1977. – 552 с.

11. Власов В.В. Избранные труды. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с.

12. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука,1971. – 808 с.

13. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. Учебн. пос. 4-е изд. перераб. и дополн. М.: Сов. радио, 1975. – 320 с.

14. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. / Пер. с англ. Под ред. Л.М. Лямшева. М.: Мир, 1971. – 557 с.

15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 5-е изд. стереотипное. М.: Наука, 1971. – 1108 с.

16. Харкевич А.А. Спектры и анализ. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1962. – 236 с.

17. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. 2-е изд. перераб. и дополн. М.: Физматгиз, 1976. – 494 с.

18. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. / Пер.с англ. М.: Мир, 1976. – 461 с.

УДК 534.833.522

OECD 01.03.AA

Расчет эффективности шумозащитных экранов для малоэтажных жилых застроек, удаленных от автодорог до 200 м

Курцев Г.М.[1], Безверхая Е.А.[2*]

[1] К.т.н., профессор кафедры «Экология и безопасность жизнедеятельности»

[2] Магистрант кафедры «Экология и безопасность жизнедеятельности»

[1,2] БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова,

г. Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д. 1

Аннотация

В работе проведен анализ роста малоэтажной жилой застройки в пригороде г. Санкт-Петербург; приведены математические модели ожидаемой эффективности шумозащитного экрана. Приведены значения натурных измерений уровней шума на территории жилой застройки, при установленном шумозащитном экране. Выполнен расчет ожидаемой акустической эффективности шумозащитных экранов высотой 3 м, 4,5 м и 5 м для жилой застройки, удаленной от автомобильной дороги на расстояние 20 м. Проведено сравнение полученных расчетных значений с экспериментальными.

Сравнение расчетных эффективностей по разным математическим моделям показало расхождения между различными методиками до 5 дБ; ни одна методика не дала 100% схождения с натурными измерениями эффективности установленного шумозащитного экрана, однако наибольшую сходимость показала методика расчета ожидаемой эффективности, представленная в ГОСТ 31295.2-2005. Сделан вывод о необходимости усовершенствования существующих математических моделей расчета эффективности шумозащитных экранов действующей нормативно-технической документации, а также в необходимости проведения дополнительных шумозащитных мероприятий.

Ключевые слова: шумозащитные экраны, эффективность, математические модели, акустическое загрязнение.

Calculation of the effectiveness of noise barriers for low-rise residential buildings, remote from highways up to 200 m

*Kurtsev G.M.[1], Bezverkhaya E.A.[2 *]*

[1]Ph.D., professor of Environment and Safety chair

[2] Master student of Environment and Safety chair

[1,2] BSTU "VOENMEH" named after. D.F. Ustinov, St. Petersburg, 1st Krasnoarmeyskaya, 1

Abstract

The paper analyzes the growth of low-rise residential buildings in the suburbs of St. Petersburg; Mathematical models of the expected effectiveness of the noise screens are given. There were measurements of noise levels on the territory directly adjoining the residential buildings, with an installed noise screen. The expected acoustic performance of noise protection screens 3 m, 4.5 m and 5 m high was calculated for territory directly adjoining residential buildings, which are remoted from the highway at a distance of 20 m. The obtained calculated values were compared with the experimental ones.

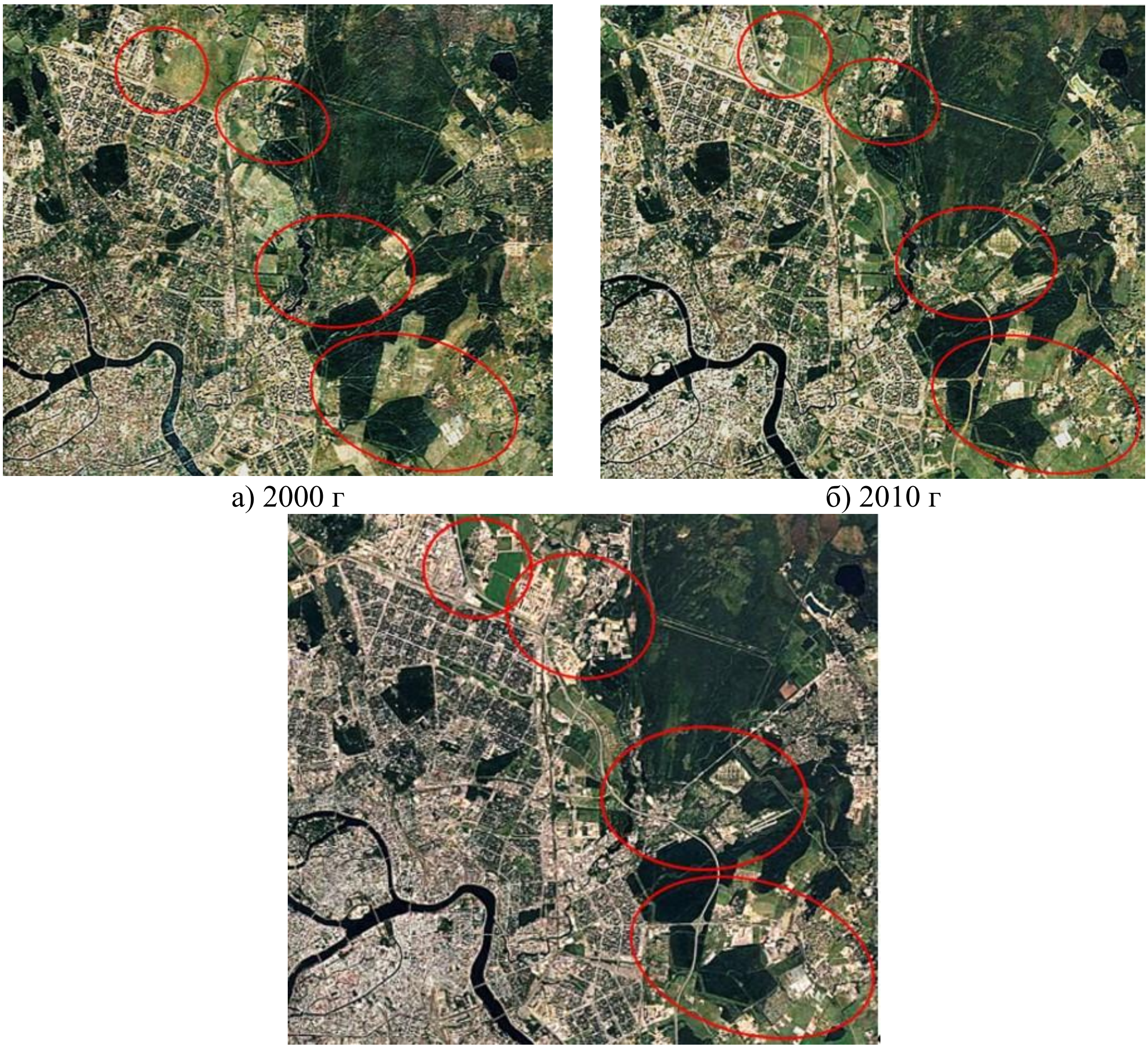
Comparison of calculated efficiencies for different mathematical models of indications of discrepancies between different methods up to 5 dB; none of these methods gave 100% convergence with real measurements of the effectiveness of the installed noise screen, however the mathematical model described in GOST 31295.2-2005, showed the greatest convergence. There was made a conclusion about the need for improve the existing mathematical models of calculating the effectiveness of noise screen of current regulatory and technical documentation, as well as the need for additional noise protection measures.

Key words: *noise screens, efficiency, mathematical models, acoustic pollution.*

[*]*E-mail: kate_next_94@mail.ru (Безверхая Е.А.)*

Введение

Развитие и увеличение числа придорожного частного жилого сектора малоэтажного типа сопровождаются неизбежным увеличением и/или появлением инфраструктуры, а следовательно, и увеличением акустического загрязнения от нее. Сегодня ситуация зашумленности особенно актуальна в малоэтажных коттеджных поселениях и деревнях, расположенных вблизи мегаполисов, таких как Москва, Санкт-Петербург и др., вдоль автодорог, или в непосредственной близости от них, где существенный трафик автотранспортных потоков становится одним из превалирующих источников шума.



а) 2000 г

б) 2010 г

в) 2016 г

Рис.1. Динамика развития малоэтажных застроек [1]

На рисунке 1 представлена динамика роста малоэтажных коттеджных жилых застроек, начиная с 2000 г. по 2016 г. Выделенные области – места, где за данный временной интервал произошло существенное наращивание малоэтажных застроек в пригороде Санкт-Петербурга. Помимо разрастания жилых застроек, развилась и инфраструктура – появилась дорога (сравните снимки «а» и «б»).

1. Математические модели существующих методик расчета ожидаемой эффективности шумозащитных экранов

Разнообразие подходов расчета эффективности шумозащитных экранов (ШЭ) велико. Подробный анализ наиболее распространенных методик расчета ожидаемой эффективности ШЭ в РФ проведен одним из авторов данной статьи [2].

В этой же статье будут приведены лишь математические модели, а основной упор сделан на расчет ожидаемой эффективности ШЭ для малоэтажных жилых застроек, а затем сравнение полученных результатов расчета с данными, полученными при проведении натурных измерений уровней шума в местах, где уже установлен шумозащитный экран. Наиболее распространенные математические модели расчета ожидаемой эффективности ШЭ приведены в таблице 1.

Таблица 1

Наиболее распространенные математические модели расчета ожидаемой эффективности

Нормативный документ	Формула расчета эффективности
ОДМ 218.2.013-2011 [3]	$\Delta L_{экр} = 18{,}2 + 7{,}8\lg(\delta + 0{,}02)$, дБА Где δ – разность длин путей звукового луча, м
СП 276.1325800.2016 [4]	$\Delta L_{экр} = 20\lg\frac{\sqrt{2\pi\lvert N\rvert}}{\mathrm{th}\sqrt{2\pi\lvert N\rvert}} + 5$, при $N \geq -0{,}2$, дБА; $\Delta L_{экр}=0$, при $N<-0{,}2$, Где N – число Френеля
ГОСТ 31295.2-2005 [5]	$D_z = 10\lg[3 + (C_2/\lambda)C_3 z K_{met}]$, дБ Где: C_2 – константа, учитывающая эффект отражения от земли; C_3 – константа, учитывающая дифракцию на верхних кромках; λ – длина звуковой волны с частотой, равной среднегеометрической частоте октавной полосы, м; z – разность длин путей распространения звука через дифракционную кромку (кромки), м; K_{met} – коэффициент, учитывающий влияние метеорологических условий.

2. Методика проведения эксперимента

2.1. Измерения уровней звука на селитебной территории

Измерение шума на селитебной территории проводилось в соответствии с ГОСТ 23337-2014 «Методы измерения шума на селитебной территории в помещениях жилых и общественных зданий» [8].

Измерение шума на территории, непосредственно прилегающей к жилым домам, проводилось на расстоянии 2 м от ограждающих конструкций зданий, на высоте (1,5±0,1) м над уровнем поверхности.

Значения других метеорологических параметров (температуры воздуха и т.д.) не выходили за рамки предельных значений, приведенных в технической документации измерительной аппаратуры. Кроме того, измерительная аппаратура не подвергалась воздействию вибрации, электрических и магнитных полей, и других параметров, указанных в [8].

Также, в соответствии с [8], длительность измерительного интервала была не менее 5 мин, а количество измерений – не менее 3-х в каждой измерительной точке.

Во время проведения измерений оператор, находился на расстоянии более 0,5 м от измерительного микрофона.

Между измерительным микрофоном и источником шума не было посторонних предметов и лиц.

2.2. Измерения шумовой характеристики от автодороги

Измерения шумовой (ШХ) характеристики проводилось в соответствии с ГОСТ 20444-2014 «Шум. Транспортные потоки. Методы определения шумовой характеристики» [9].

Места для проведения измерений шумовых характеристик автотранспортных потоков были выбраны в соответствии с пунктом 6.1. [9] на расстоянии не менее 50 м от перекрестков, транспортных площадей и остановочных пунктов пассажирского общественного транспорта.

Измерительная аппаратура не подвергалась воздействию вибрации, электрических и магнитных полей, и других параметров, указанных в пункте 6.6 [9].

Время проведения измерений было выбрано в периоды максимальной интенсивности движения транспортных потоков как в дневное, так и в ночное время суток, что отвечает требованию пункта 6.7 [9].

2.3. Средства измерений

Согласно пункту 5 [9], измерения уровней звука, эквивалентных и максимальных уровней звука проводились интегрирующими-усредняющими шумомерами 1-го класса, соответствующими требованиям ГОСТ 17187-2010 [1].

В соответствии с п.5.2. [9], средства измерений, предназначенные для измерения шума, на момент проведения измерений имели действующие свидетельства о поверке.

Перед началом каждой серии измерений и после проводилась проверка калибровки средств измерения в соответствии с руководствами по их эксплуатации, что отвечает требованиям пункта 5.3 [9].

3. Оценка эффективности ШЭ, установленного вдоль малоэтажной ЖЗ

3.1. Описание условий и результаты измерений

Метеорологические условия, а также условия расположения источника шума (ИШ) и территории, непосредственно прилегающей к жилой застройке (РТ) на момент проведения измерений приведены в таблице 2.

Таблица 2
Метеорологические условия и расположение

Параметр	Единица измерения	Значение
Расстояние от ИШ до РТ	метр (м)	20
Расстояние от ИШ до ШЭ	метр (м)	14
Температура	℃	+8°C
Давление	мм.рт.ст.	744 мм. рт. ст.;
Влажность	%	89%

Согласно ГОСТ Р 52399-2005 [7] ШЭ может быть установлен не ближе, чем 2,5 м от автодороги – данное условие соблюдено.

Шумовая характеристика автодороги, измеренная на расстоянии 7,5 м от ближайшей полосы, представлена в таблице 3.

Таблица 3
ШХ автодороги в дневное и в ночное время суток

№ точки	Примечание	Уровни звукового давления, дБ в октавных полосах со среднегеометрическими частотами, Гц									УЗэкв, дБА	УЗмакс, дБА
		31,5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000		
РТ0	В дневное время суток	75,9	75,7	71,9	67,5	66,2	67,3	62,8	57,4	60,1	71,0	85,5
	В ночное время суток	61,2	67,9	61,8	60,3	59,3	61,6	57,6	49,5	45,3	62,7	75,2

На рисунке 2 представлена карта-схема проведения натурных измерений уровня шума на территории ЖЗ.

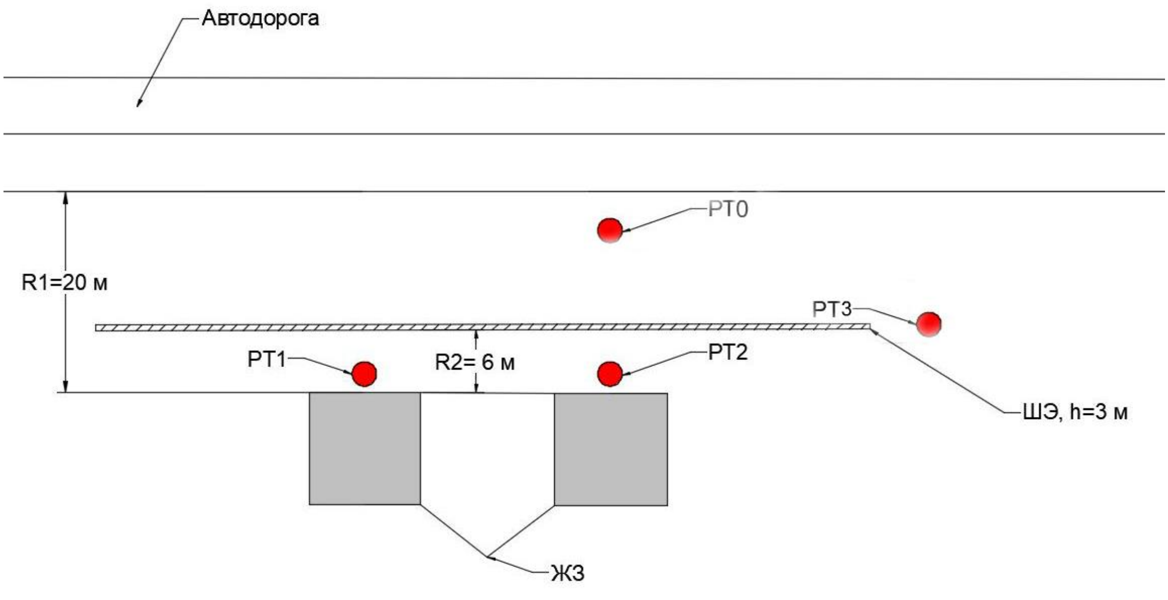


Рис. 2. Карта-схема расположения РТ и автодороги (ИШ) при проведении экспериментов

3.2. Результаты натурных измерений уровней шума в расчетных точках

Результаты измерений представлены в таблице 4. В данной таблице РТ1 и РТ2 располагаются за ШЭ на высотах 1,5 м и 4,5 м, на уровне середины окон первого и второго этажа соответственно, а РТ3 – без ШЭ, РТ0 – шумовая характеристик автодороги, на расстоянии 7,5 м (табл.3).

РТ1 и РТ2 расположены на расстоянии в 20 м от автодороги, ШЭ в 6 м от РТ в сторону дорожного полотна, т.е. в 14 м от автодороги.

Шумозащитный экран высотой (h) 3 м выполнен из оцинкованной стали.

Таблица 4
Результаты натурных измерений в РТ

Расчетная точка	УЗ в РТ в ночное время, дБА	УЗ в РТ в дневное время, дБА
РТ-0 (1,5 м)	62,7	71,0
РТ-3 (1,5)	*59,7*	*68*
РТ-3 (4,5)	*58,9*	*66,5*
РТ-1 (1,5 м)	48,9	*57,4*
РТ-1 (4,5 м)	*55,6*	*63,2*
РТ-2 (1,5)	*50,4*	*57,5*
РТ-2 (4,5)	*57,1*	*64,3*

Согласно данным таблицы 4 превышения наблюдаются как ночное, так и в дневное время, несмотря на шумозащитный экран.

По результатам анализа полученных натурных измерений были выявлены превышения в ночное время суток до 12 дБА, а днем до 9 дБА.

4. Расчет ожидаемой эффективности шумозащитного экрана для малоэтажной жилой застройки

Отметим, что малоэтажные жилые застройки, расположенные вдоль автодорог, обладают рядом особенностей, например: могут располагаться, как в непосредственной близости от автодорог и автомагистралей, так и на удаленном расстоянии. В нашем случае ЖЗ расположена на удалении 20 м от ИШ.

Результаты расчета ожидаемой эффективности шумозащитного экрана высотой 3 м; 4,5 м и 5 м были проведены для высоты 1,5 м и 4,5 м, по ОДМ 218.2.013-2011 [3], СП 276.1325800 [4] и ГОСТ 31295.2-2005 [5] и представлены в таблице 5. Расчеты для РТ-2, аналогичны расчетам РТ-1.

Таблица 5
Ожидаемая эффективность ШЭ

Расчетная точка	НТД	Ожидаемая эффективность ШЭ, дБА		
		3 м	4,5	5,0
РТ-1 (1,5 м)	СП 276. 1325800.2016	*12,0*	*17,2*	*18,5*
	ОДМ 218. 2.013-2011	*14,5*	*18,6*	*19,6*
	ГОСТ 31295.2-2005	*11,5*	*14,5*	*15,4*

Расчетная точка	НТД	Ожидаемая эффективность ШЭ, дБА		
		3 м	4,5	5,0
РТ-1 (4,5 м)	СП 276. 1325800.2016	*5,9*	*9,0*	*11,4*
	ОДМ 218. 2.013-2011	*7,5*	*11,7*	*14,0*
	ГОСТ 31295.2-2005	*3,7*	*8,0*	*11,5*

Согласно таблице 5, ни одна математическая модель не показала 100% сходимости с экспериментальными измерениями, однако наилучшую сходимость с измерениями, для установленного ШЭ (высотой в 3 м), были у математической модели, представленной в ГОСТ 31295.2-2005 [5].

Заключение

Расчет эффективности шумозащитного экрана по всем трем методиками показал, что данная высота ШЭ не снижает шум ни в одной из расчетных точек, расположенных на территории исследуемой малоэтажной жилой застройки.

Кроме того, приведенные методики расчета ожидаемой эффективности шумозащитного экрана дают расхождения в расчётах вплоть до5 дБ, однако ни по одной из методик не достигается необходимой эффективности ШЭ для второго этажа малоэтажной жилой застройки, что говорит не только о необходимости внесения корректировок в математические модели, представленные в действующей нормативно-технической базе РФ , но и о необходимости проведения дополнительных шумозащитных мероприятий и/или необходимости изменения положения шумозащитного экрана относительно источника шума (по возможности переместить ШЭ ближе к ИШ).

Список литературы

1. Timelaps от Google https://earthengine.google.com/timelapse/#v=34.34547,16.55432,0,latLng&t=0.00 (последнее обращение: 12.02.2019).
2. Безверхая Е.А., Чеботарева Е.Ю. Анализ методик расчета эффективности шумозащитных экранов // Noise Theory and Practice. – 2018. № 2 (4). с. 30-39.
3. ОДМ 218.2.013-2011. Отраслевой дорожный методический документ. Методические рекомендации по защите от транспортного шума территорий, прилегающих к автомобильным дорогам // Принят: Росавтодором 13.12.2012.
4. СП 276.1325800.2016. Свод правил. Здания и территории. Правила проектирования защиты от шума транспортных потоков // Принят: Министерством строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации 03.12.2016.
5. ГОСТ 31295.2-2005 (ИСО 9613-2:1996). Межгосударственный стандарт. Шум. Затухание звука при распространении на местности. Часть 2. Общий метод расчета // Принят: Росстандартом 20.07.2006.
6. Иванов Н.И. Защита от шума и вибрации: учебник / Н.И. Иванов // СПб.: НИЦ АРТ. – 2017. – 268 с.

7. ГОСТ Р 52399-2005. Национальный стандарт Российской Федерации. Геометрические элементы автомобильных дорог // Принят: Росстандартом 01.05.2006.

8. ГОСТ 23337-2014. Методы измерения шума на селитебной территории и в помещениях жилых и общественных зданий. Официальное издание М.: Стандартинформ, 2015 год // Принят: Росстандартом.

9. ГОСТ 20444-2014. Шум. Транспортные потоки. Методы определения шумовой характеристики. Официальное издание: М.: Стандартинформ, 2015 год // Принят: Росстандартом.

10. ГОСТ 17187-2010 (IEC 61672-1:2002) Шумомеры. Часть 1. Технические требования. М.: Стандартинформ, 2012 год // Принят: Росстандартом.