

УДК 534.2

OECD 1.03

## Об одной постановке краевой задачи аэроакустики с импедансными граничными условиями

Гаврилюк В.Н.<sup>1</sup>, Тимушев С.Ф.<sup>2</sup>, Аксенов А.А.<sup>3</sup><sup>1</sup>Вед. программист, 125993, Москва, МАИ (НИУ), Волоколамское шоссе, д.4,<sup>2</sup>Зав. кафедрой 202, МАИ (НИУ), 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д.4,<sup>3</sup>Зам.директора, ООО «Тесис», 127083 Москва, улица Юннатов, 18/706,

### Аннотация

Снижение шума вентилятора турбореактивного двухконтурного двигателя (ТРДД) является необходимым условием удовлетворения самолета требованиям стандартов ИКАО. Эффективным средством снижения этого шума являются звукопоглощающие конструкции (ЗПК), оптимальные параметры которых и их расположение может быть определено многопараметрическими вычислениями пространственных звуковых полей для каждой искомой тональной компоненты. С этой целью, предлагается постановка краевой задачи аэроакустики с импедансными граничными условиями на внешней поверхности ЗПК и на поверхности излучения в терминах образа Фурье возмущения параметров гидродинамического течения. Для практического решения данной задачи разработан новый высокоэффективный метод численного моделирования 3-мерных акустических полей на частотах следования лопаток (ЧСЛ), их высших и комбинационных гармониках и других частотах, генерируемых вентилятором авиационного двигателя. Он может быть также использован для расчета шума, создаваемого лопаточными машинами в компьютерных устройствах и системах кондиционирования. Этот метод базируется на прямом решении Фурье - преобразованного конвективного волнового уравнения в комплексных переменных в декартовой системе координат с граничными условиями в форме комплексного импеданса на поверхности ЗПК. Получение пространственного источника шума обеспечивается применением акустико-вихревой декомпозиции.

**Ключевые слова:** звукопоглощающие конструкции, уравнение аэроакустики, тональный шум, турбореактивный двухконтурный двигатель, вентилятор, комплексный импеданс, декомпозиция, образ Фурье; источник возмущений.

### *On a formulation of the boundary-value problem of aeroacoustics with impedance boundary conditions*

Vladimir N. Gavriilyuk<sup>1</sup>; Sergey F. Timushev<sup>2\*</sup>; Andrey A. Aksenov<sup>3</sup><sup>1</sup>Leading programmer, Rocket Engines Department of the Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia<sup>2</sup>Head of Department, Rocket Engines Department of the Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia<sup>3</sup>Deputy of Director General, TESIS Ltd., Moscow, Russia

### Abstract

Reducing fan noise in turbofan engines is a prerequisite for meeting the aircraft requirements of ICAO standards. An effective means of reducing this noise are sound-absorbing structures (SAS), its optimal parameters and their arrangement can be determined by multiparametric calculations of the spatial sound fields for each desired tonal component. To this goal, it is proposed the formulation of the boundary-value problem of aeroacoustics with impedance boundary conditions on the outer surface of the SAS and on the radiation surface in terms of the Fourier transform of the perturbation of the hydrodynamic flow parameters. For practical solution of this problem, a new highly efficient method of numerical modeling of 3-dimensional acoustic fields at blade frequencies (BPF), their higher and combination harmonics and other frequencies generated by an

\*E-mail: irico.harmony@gmail.com (Тимушев С.Ф.), ppvngavr@yandex.ru (Гаврилюк В.Н.), andrey@tesis.com.ru (Аксенов А.А.)

*aircraft engine fan has been developed. It can also be used to calculate the noise generated by the blade machines in computer devices and air conditioning systems. This method is based on the direct solution of Fourier-transformed convective wave equation in complex variables in a Cartesian coordinate system with boundary conditions in the form of a complex impedance on the surface of the SAS. Obtaining a spatial source of noise is provided by the use of acoustic-vortex decomposition.*

**Key words:** sound-absorbing structures, equation of aeroacoustics, tonal noise, turbofan engine, fan, complex impedance, decomposition, Fourier transform, oscillation source.

## Введение

Рассматривается постановка краевой задачи для трех моделей и соответствующих неоднородных волновых уравнений аэроакустики в рамках единого подхода с использованием возмущений параметров течения и применением граничных условий импедансного типа. Первая модель, описывающая изоэнтропическое невязкое течение, строится на основе концепции, предложенной Кроу С. [1] и Артамоновым К.И. [2]. На примере этой модели анализируется метод акустико-вихревой декомпозиции и источник акустического излучения. Вторая модель, описывающая неизоэнтропическое вязкое течение, базируется на уравнении, предложенном Филипсом О. [3]. Третья модель, описывающая неизоэнтропическое невязкое течение, базируется на уравнении, предложенном Хоу М. [4]. Уравнения аэроакустики, используемые во всех трех моделях, выведены в терминах параметров гидродинамического течения и, как указывается в работах Федорченко А.Т. [5], Доак П. [6] и Голдстейн М. [7], не могут рассматриваться как чисто звуковые. Правые части, или источниковые члены, в этих уравнениях описывают генерацию возмущений параметров течения, не выделяя собственно акустическую составляющую, а левые части описывают пространственно-временное распространение акустико-вихревых возмущений волнового типа с учетом конвективного переноса и пространственной неоднородности скорости звука.

Граничные условия импедансного типа записываются в терминах возмущений параметров потока относительно их среднего значения. Исходные уравнения аэроакустики линеаризуются относительно их возмущенных значений. Такая линеаризация позволяет осуществить преобразование Фурье полученных уравнений и импедансных граничных условий и сформулировать постановку соответствующей краевой задачи. В работах [8, 9, 10] приведены валидационные и демонстрационные примеры эффективного численного решения построенной таким образом краевой задачи для модифицированной модели Кроу-Артамонова с использованием метода конечных объемов на адаптированной к границе расчетной области декартовой сетке (см. Рис.1).

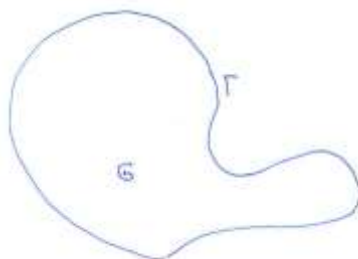


Рис. 1. Расчетная область «G» произвольной формы с границей «Г», содержащей плоскости симметрии и криволинейные стенки, на которых задается условие непроницаемости, ЗПК и внешний контур, на которых задаются импедансные граничные условия

## Определения

Угловые скобки  $\langle \rangle$  означают, что берется среднее по времени значение заключенного в них выражения. Штрихом обозначается его пульсационная относительно среднего значения составляющая.

Так, энтальпию представим в виде суммы:  $h = \langle h \rangle + h'$ , где энтальпия  $h = \int_{p_{ref}}^p \frac{dp}{\rho}$ ,

а ее пульсационная составляющая  $h' = \int_{\langle p \rangle}^{\langle p \rangle + p'} \frac{dp}{\rho}$ , где  $p' = p - \langle p \rangle$  – пульсации давления относительно его осредненного по времени значения.

Здесь используется адиабатическая скорость звука, определяемая через осредненные по времени параметры среды:  $c = c(\langle p \rangle, \langle S \rangle)$ .

Преобразование Фурье  $\Phi(\omega)$  от функции времени  $f(t)$  имеет вид:

$$\Phi(\omega) \cdot f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \cdot dt$$

где  $\omega > 0$  – частота.

## 1. Модифицированная модель Кроу-Артамонова (изоэнтропическое невязкое течение)

### 1.1. Декомпозиция поля скорости и вывод волнового уравнения относительно энтальпии

Представим скорость  $\mathbf{v}$  в виде суммы скорости основного течения  $\mathbf{u}$  и скорости акустического  $\nabla\varphi$  движения.

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla\varphi \quad (1)$$

Закон сохранения импульса и массы запишем в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla h + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

где  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости.

Для адиабатического течения малое возмущение давления и плотности связано с возмущением энтальпии следующим образом:

$$\delta h = \frac{\delta p}{\rho} = c^2 \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (4)$$

Представим (3) в не дивергентной форме:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (5)$$

Отсюда с учетом (4) получим уравнение относительно энтальпии:

$$\frac{1}{c^2} \frac{Dh}{Dt} + \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

Теперь предположим, что акустическая составляющая скорости много меньше скорости основного течения:

$$|\nabla\varphi| \ll |\mathbf{u}| \quad (7)$$

Тогда из (2) получим:

$$\frac{\partial(\mathbf{u} + \nabla\varphi)}{\partial t} + \nabla \frac{(\mathbf{u} + \nabla\varphi)^2}{2} - (\mathbf{u} + \nabla\varphi \times (\nabla \times (\mathbf{u} + \nabla\varphi))) = -\nabla h + \nu \Delta(\mathbf{u} + \nabla\varphi) \quad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla H + \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla \varphi \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (9)$$

где

$$H = h + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \nu \Delta\varphi \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \quad (11)$$

Пренебрегая в (9) и (10) вязкими членами и квадратом скорости акустического движения  $|\nabla\varphi|^2$ , а также эффектами взаимодействия акустической и вихревой мод (последний член в уравнении (9)), получим:

$$h = H - \frac{d\varphi}{dt} \quad (12)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla H \quad (13)$$

Подставляя (12) в (5), получим:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left( H - \frac{d\varphi}{dt} \right) + \Delta\varphi + \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (14)$$

Или, с учетом принятой схемы линеаризации

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \Delta\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{dH}{dt} + \nabla \mathbf{u} \quad (15)$$

Применяя оператор градиента к (13) получим:

$$\nabla \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\Delta H \quad (16)$$

Применяя оператор  $\frac{d}{dt}$  к (15) и, пренебрегая разностью  $(\mathbf{u}\nabla)\Delta\varphi - \Delta(\mathbf{u}\nabla\varphi)$ , получим:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2(H-h)}{dt^2} - \Delta(H-h) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2H}{dt^2} + \frac{d}{dt} \nabla \mathbf{u} \quad (17)$$

Отсюда

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2h}{dt^2} - \Delta h = \nabla \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{d}{dt} \nabla \mathbf{u} \quad (18)$$

## 1.2. Источниковая функция и преобразование Фурье

Подставляя в (18) энтальпию в виде  $h = \langle h \rangle + h'$ , получим уравнение:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2h'}{dt^2} - \Delta h' = f \quad (19)$$

с источником членом

$$f = \nabla(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla)\nabla\mathbf{u} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2\langle h \rangle}{dt^2} + \Delta\langle h \rangle \quad (20)$$

Учитывая условие (7), позволяющее заменить в (20) скорость вихревой моды на полную скорость, применяя к (19) и (20) преобразование Фурье  $\Phi(\omega)$  и переходя к тензорной форме, запишем (19) в виде:

$$\frac{1}{c^2} \left( i\omega + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left( i\omega + \langle v_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \right) h' - \frac{\partial^2 h'}{\partial x_i^2} = \Phi(\omega)(f) \quad (21)$$

$$\Phi(\omega)(f) = \Phi(\omega) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (22)$$

## 2. Модель Филиппа (неизозэнтропическое вязкое течение)

Относительно параметра гидродинамического потока  $\Pi = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)$  единое уравнение, учитывающее термодинамическую неоднородность течения, в модели Филиппа, записывается в виде [3] ( $k = \frac{C_p}{C_v}$ ):

$$\left( \frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Pi = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{c_p} \frac{DS}{Dt} \right) \quad (23)$$

где

$$e_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \quad (24)$$

Представляя параметр  $\Pi$  в виде суммы осредненной по времени и пульсационной составляющих  $\Pi = \langle \Pi \rangle + \Pi'$ , получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Pi' = \\ & \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{c_p} \frac{DS}{Dt} \right) - \left( \frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \langle \Pi \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

Выделяя линейную составляющую в левой, «волновой», части уравнения (25), применяя к нему преобразование Фурье и учитывая, что  $\langle \Pi \rangle$  и его производные по пространству не зависят от времени, получим

$$\left( \left( i\omega + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left( i\omega + \langle v_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Pi' = \Phi(\omega)(f) \quad (26)$$

$$\Phi(\omega)(f) = \Phi(\omega) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{c_p} \frac{DS}{Dt} \right) \right) \quad (27)$$

В изозэнтропийном потоке в источниковом члене (27) остается только первый член, совпадающий с источниковым членом (22) в модели Кроу-Артамонава [1, 2].

## 3. Модель Хоу (неизозэнтропическое невязкое течение)

Относительно энтальпии торможения гидродинамического потока  $B = h + \frac{v^2}{2}$  уравнение Хоу записывается в виде [4]:

$$\left( \frac{D}{Dt} \frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} + \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \nabla - \Delta \right) B = \left( \nabla - \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) L + \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{DS}{Dt} + \frac{1}{k-1} \frac{D^2 S}{Dt^2} \right), \quad (28)$$

где

$$\mathbf{L} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} - T \nabla S \quad (29)$$

Представляя  $B$  в виде  $B = \langle h \rangle + h' + \frac{v^2}{2}$ , получим

$$\left( \frac{D}{Dt} \frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} + \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \nabla - \nabla^2 \right) h' = f, \quad (30)$$

$$f = \left( \nabla - \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \mathbf{L} + \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{DS}{Dt} + \frac{1}{k-1} \frac{D^2 S}{Dt^2} \right) - \left( \frac{D}{Dt} \frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} + \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \nabla - \nabla^2 \right) \frac{v^2}{2} - \left( \frac{D}{Dt} \frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} + \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \nabla - \nabla^2 \right) \langle h \rangle, \quad (31)$$

Заменяя коэффициенты в левой «волновой» части уравнения (30) на их осредненные по времени значения и применяя преобразование Фурье, а также учитывая, что  $\langle B \rangle$  и его производные по пространству не зависят от времени, получим

$$\left( \left( i\omega + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{1}{c^2} \left( i\omega + \langle v_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{c^2} \left( i\omega + \langle v_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i^2} \right) h' = \Phi(\omega)(f) \quad (32)$$

$\Phi(\omega)(f) =$

$$\Phi(\omega) \left( \left( \nabla - \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \mathbf{L} + \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{DS}{Dt} + \frac{1}{k-1} \frac{D^2 S}{Dt^2} \right) - \left( \frac{D}{Dt} \frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} + \frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \nabla - \nabla^2 \right) \frac{v^2}{2} \right) \quad (33)$$

#### 4. Граничные условия

Проекция линеаризованного и Фурье преобразованного уравнения импульса на нормаль к стенке, полученная в предположении малости нормального числа Маха, имеет вид

$$i\omega \cdot v'_n + \frac{\partial h'}{\partial n} = 0, \quad (34)$$

где  $v'_n$  – нормальная к стенке составляющая пульсационной скорости.

Фурье преобразованное условие Майерса [11] на внешней поверхности ЗПК запишем в виде:

$$i\omega v'_n = \left( i\omega + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} n_i n_k \right) \frac{p'}{\rho c Z}, \quad (35)$$

Комплексный импеданс  $Z$  является функцией  $\omega$ , числа Маха, амплитуды пульсаций и характеристик пограничного слоя.

Условие излучения Зоммерфельда на неотражающих граничных условиях записывается с учетом поправки на кривизну волнового фронта [12], пропорциональной лапласиану в касательной к поверхности плоскости.

Предполагая, что возмущения течения в окрестности ЗПК являются адиабатическими, граничные термодинамические соотношения могут быть представлены в виде:

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial h} \right)_s h' = \rho c^2 \Pi', \quad (36)$$

С учетом этого граничные, или краевые, условия в зависимости от используемой модели записываются следующим образом.

Граничное условие на стенке для модифицированной модели Кроу-Артамонова [1, 2] и модели Хоу [4]

$$\frac{\partial h'}{\partial n} + \left( i\omega + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} n_i n_k \right) \left( \frac{\partial p}{\partial h} \right)_s \frac{h'}{\rho c Z} = 0 \quad (37)$$

Неотражающее условие на внешней границе для этих моделей:

$$\frac{\partial h'}{\partial n} + \left( i\omega + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} n_i n_k + \frac{ic^2}{2\omega} \Delta_n \right) \left( \frac{\partial p}{\partial h} \right)_s \frac{1}{\rho c} h' = 0 \quad (38)$$

Граничное условие на стенке для модели модели Филлипса [**Ошибка! Закладка не определена.**]

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\rho c^2 \Pi'}{\left( \frac{\partial p}{\partial h} \right)_s} + \left( i\omega + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} n_i n_k \right) \frac{c \Pi'}{Z} = 0, \quad (39)$$

Неотражающее условие на внешней границе для модели Филлипса:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\rho c^2 \Pi'}{\left( \frac{\partial p}{\partial h} \right)_s} + \left( i\omega + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} n_i n_k + \frac{ic^2}{2\omega} \Delta_n \right) (c \Pi') = 0, \quad (40)$$

### Заключение

Обоснованы и представлены постановки краевой задачи аэроакустики относительно пульсаций энтальпии и параметра давления:

- для краевой задачи (21), (22) с граничными условиями (37), (38) относительно образа Фурье возмущения энтальпии в модифицированной модели Кроу-Артамонова;

- для краевой задачи (26), (27) с граничными условиями (39), (40) относительно возмущения параметра течения в форме функции давления для модели Филлипса;

- для краевой задачи (32), (33) с граничными условиями (37), (38) относительно образа Фурье возмущения энтальпии в модели Хоу.

На примере модификации модели Кроу-Артамонова проанализирована декомпозиция поля возмущений энтальпии на акустическую и вихревую моду для выделения источника шума.

### Список литературы

1. Crow S.C. Aerodynamic Sound Emission as a Singular Perturbation Problem.- Studies in Applied Mathematics, 1970, vol. XLIX, No.1
2. Артамонов К.И. Термогидроакустическая устойчивость, 1982
3. Phillips O. M. On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers // J. Fluid Mech.- 9, № 1.- 1960.- P. 1-28.
4. Howe M. S. Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute // J. Fluid Mech.- 1975.- 71, № 4.- P. 625-673.

5. Федорченко А. Т. К нелинейной теории аэродинамических источников звука // Доклады академии наук СССР.– 1988.– 344, № 1.– С. 48–51.
6. Doak P. E. Fluctuating total enthalpy as the basic generalized acoustic field // Theor. Comp. Fluid Dyn.– 10.– 1998.– P. 115–133.
7. Goldstein M. E. On identifying the true sources of aerodynamic sound // J. Fluid Mech.– 2005.– 526.– P. 337–347.
8. А.А. Аксенов, V.N. Gavriilyuk, S.F. Timushev Numerical modeling of fan noise in electronics // Журнал INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings Том 251 Номер 1 С.825-833 Издатель Institute of Noise Control Engineering, 2015
9. А.А. Аксенов, V.N. Gavriilyuk and S.F. Timushev. Numerical Simulation of Tonal Fan Noise of Computers and Air Conditioning Systems. ISSN 1063\_7710, Acoustical Physics, 2016, Vol. 62, No. 4, pp. 447–455. Pleiades Publishing, Ltd., 2016. Original Russian Text © А.А. Аксенов, V.N. Gavriilyuk, S.F. Timushev, 2016, published in Akusticheskii Zhurnal, 2016, Vol. 62, No. 4, pp. 442–450.
10. Тимушев С.Ф., Гаврилюк В.Н., Аксенов А.А., Клименко Д.В. Моделирование источника и акустического поля тонального шума лопаточных машин// Noise Theory and practice. Том 3 №3 (III, 2017).
11. M. K. Mayers. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. - Journal of Sound and Vibration 71(3), September 1980, 429-434.
12. E. Redon, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, J.-F. Mercier and S. Poernomo Sari. Non-reflecting boundary conditions for acoustic propagation in ducts with acoustic treatment and mean flow. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 86, 2011, 1360–1378.