

УДК 534.833.534
OECD 01.03.AA

Вязкоупругие резонаторы

Казаков Л.И.

К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН, г. Владивосток

Аннотация

Выполнен приближенный расчет акустических характеристик резонаторов в виде вязкоупругих пробок с закрепленными боковыми поверхностями. Рассмотрены 5 основных разновидностей таких резонаторов. Приведены примеры сравнения результатов приближенной и точной теорий и примеры экспериментального подтверждения приближенной теории.

Ключевые слова: вязкоупругие материалы, резонаторы, акустическая проводимость, резонансная частота.

Viscoelastic resonators

Kazakov L.I.

*K.F.-M.N., leading researcher, Pacific Oceanological Institute
named after V.I. Il'ichev FEB RAS, Vladivostok*

Abstract

The approximate calculation of acoustic characteristics of resonators in the form of viscoelastic corks with fixed side surfaces is made. 5 main types of such resonators are considered. Examples of comparison of results of approximate and exact theories and examples of experimental confirmation of the approximate theory are given.

Key words: *viscoelastic materials, resonators, acoustic conductivity, resonance frequency.*

Введение

Ниже получены приближенные расчетные формулы для акустических характеристик вязкоупругих резонаторов, выполненных в виде пробок с закрепленной боковой поверхностью следующих пяти конфигураций: сплошной круглый цилиндр, три разновидности в форме круглого цилиндра с центральным круглым отверстием, крепящиеся либо одной, либо обеими боковыми поверхностями ("внешний", "внутренний" и кольцевой резонаторы, см. рис. 3), прямоугольный в плане резонатор. Состоятельность приближенных формул подтверждена сравнением с результатами точных вычислений и экспериментов.

Любой механический резонатор состоит из массы, упругости и потерь. Всем этим рассматриваемые материалы обладают.

1. Приближенная теория резонаторов

1.1. Вязкоупругие материалы

Категория вязкоупругих материалов охватывает весьма обширный класс веществ, таких как резины, мягкие пластмассы, очень вязкие жидкости (смолы, битумы и пр.), гели, растительные и животные ткани и т.д. Эти вещества занимают промежуточное место между идеально упругими твердыми телами и вязкими несжимаемыми жидкостями, совмещающая в себе свойства тех и других.

Однородное изотропное вязкоупругое тело, подобно идеально упругому, характеризуют двумя модулями упругости, например, модулем сдвига μ (Па) и модулем объемного сжатия K (Па) [1, с. 22]. При колебаниях в вязкоупругом теле происходит (как и в вязкой жидкости) диссипация механической энергии за счет внутреннего трения. Поэтому его модули упругости при гармонических колебаниях принципиально комплексные и частотно-зависимые величины [2], [3].

Из двух модулей упругости вязкоупругого материала важнейшим является комплексный модуль сдвига:

$$\mu^*(\omega) = \mu(\omega)[1 - i\eta(\omega)], \quad (1)$$

где ω – круговая частота звука, $\mu(\omega)$ – модуль сдвига, i – мнимая единица, $\eta(\omega)$ – коэффициент сдвиговых потерь. Он резко отличается от модуля всестороннего сжатия K следующим. Во-первых, для всех вязкоупругих материалов имеет место соотношение:

$$|\mu^*| \ll K, \quad (2)$$

которое, по-существу, служит определением таких материалов и относит их в разряд "практически несжимаемых", "водоподобных" веществ [4, с. 446]. Во-вторых, частотные зависимости $\mu(\omega)$ и $\eta(\omega)$ наиболее ярко проявляются в диапазоне звуковых и ультразвуковых частот, в то время как модуль объемного сжатия K в этом диапазоне от частоты практически не зависит, а поэтому может считаться действительной упругой константой вещества.

Модули сдвига резин могут отличаться друг от друга в десятки и сотни раз и лежат в пределах $\mu(\omega) = 10^5 \div 10^8$ Па. Коэффициенты сдвиговых потерь резин обычно порядка $\eta(\omega) = 0,1 \div 1,0$. У всех вязкоупругих материалов параметры K (Па), плотность ρ (кг/м³), скорость волн сжатия $c_l = (K/\rho)^{1/2}$ (м/с) примерно такие же, как у воды.

На низких частотах, когда высота пробки h (м) мала в сравнении с длиной волны сжатия, последней можно пренебречь и считать материал пробки несжимаемым. Это допущение позволяет построить приближенную теорию вынужденных колебаний пробки с закрепленной боковой поверхностью.

Общее уравнение движения однородного изотропного упругого тела можно записать в виде [1, с. 23, 26, 125]:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{U} - \frac{3}{2(1 + \sigma)} \nabla P, \quad (3)$$

где \vec{U} – вектор деформации среды (м), σ – её коэффициент Пуассона,

$$P = -\frac{\sigma_{ll}}{3} = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) -$$

звуковое давление (Па). В силу предполагаемой несжимаемости среды:

$$\sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} \approx \frac{1}{2}.$$

Тогда для гармонических колебаний уравнение (3) примет вид:

$$-i\omega\rho\vec{V} = \frac{i\mu^*}{\omega}\Delta\vec{V} - \nabla P. \quad (4)$$

По форме это уравнение совпадает с уравнением Навье – Стокса для малых гармонических колебаний вязкой жидкости [5, с. 73, 350], причем роль вязкости здесь играет величина $i\mu^*(\omega)/\omega$. Это указывает на аналогию движений вязкоупругой пробки резонатора и столбика вязкой жидкости в трубе.

Для достаточно высокой пробки можно предположить, что движение происходит только вдоль центральной оси z и $V_z = V_z(x, y)$. Если при этом считать $P = P(z)$, то из уравнения (4) следует постоянство ∇P . Пренебрегая влиянием воздуха над пробкой и присоединенной массой среды (воды) на входе резонатора, появляющейся из-за неравномерности колебательной скорости по сечению пробки, найдем:

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{P}{h},$$

где P – звуковое давление, действующее снизу на резонатор. В этом случае уравнение (4) примет вид:

$$\Delta V_z + \kappa^2 V_z = \frac{i\omega P}{\mu^* h}, \quad (5)$$

или в цилиндрических координатах:

$$\frac{d^2 V_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_z}{dr} + \kappa^2 V_z = \frac{i\omega P}{\mu^* h}. \quad (6)$$

Здесь

$$\kappa = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu^*(\omega)}} \quad (7)$$

комплексное волновое число сдвиговой волны.

1.2. Цилиндрический резонатор

Для цилиндрического резонатора круглого сечения радиуса a уравнение (6) имеет решением:

$$V_z(r) = \frac{P}{i\omega\rho h} \left[\frac{J_0(\kappa r)}{J_0(\kappa a)} - 1 \right], \quad (8)$$

откуда найдем среднюю по сечению пробки продольную скорость:

$$\overline{V_z(r)} = \frac{P}{i\omega\rho h} \left[\frac{2J_1(\kappa a)}{\kappa a J_0(\kappa a)} - 1 \right] = \frac{P}{i\omega\rho h} \frac{J_2(\kappa a)}{J_0(\kappa a)},$$

где $J_n(\kappa a)$ – функции Бесселя. Поэтому для приведенной к воде проводимости цилиндрических резонаторов радиуса a (в предположении аддитивности их проводимостей) получим:

$$Y = \frac{\varepsilon \rho_0 c_0 J_2(\kappa a)}{i \omega \rho h J_0(\kappa a)}, \quad (9)$$

где ε – доля площади поверхности, занимаемая этими резонаторами; ρ_0 – плотность воды, c_0 – скорость звука в воде.

Если в разложении

$$\frac{J_0(x)}{J_2(x)} = \frac{8}{x^2} - \frac{4}{3} - \frac{x^2}{144} - \frac{x^4}{4320} - \dots$$

оставить только два первых члена, то учитывая (1) и (7), представим (9) в приближенном виде:

$$Y(\omega) \approx \frac{\varepsilon \rho_0 c_0 \omega a^2}{8 \mu(\omega) h} \frac{-i}{1 - \frac{\omega^2 \mu(\omega_p)}{\omega_p^2 \mu(\omega)} - i \eta(\omega)}, \quad (10)$$

где

$$\omega_p = \frac{2,45}{a} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho}} \quad (11)$$

собственная круговая частота цилиндрического резонатора. Значение численного коэффициента здесь можно уточнить, заметив, что при $\eta \ll 1$ собственная частота основного резонанса в формуле (9) будет определяться первым корнем функции $J_0(\kappa a)$, равным 2,405.

Второе приближение к точному значению ω_p получим, если в предыдущем разложении приравняем нулю сумму первых трёх слагаемых: $\frac{8}{(\kappa_p a)^2} - \frac{4}{3} - \frac{(\kappa_p a)^2}{144} = 0$. Решение этого квадратного относительно $(\kappa_p a)^2$ уравнения приведет к формуле (11) с численным коэффициентом 2,413, что превышает точное значение 2,405 всего на 0,34%, т.е. в 5,5 раза точнее начального приближения.

На рис. 1 для цилиндрического резонатора представлены результаты расчета проводимостей по "точной" (9) и приближенной (10) формулам, а также данные измерений на гидроакустической трубе диаметром 41 мм при температуре 30°C. Параметры резонатора: материал – строительный битум; $\varepsilon = 0,859$, $2a = 3,8$ см, $h = 4,35$ см; $\rho_0 = 995,7$ кг/м³, $c_0 = 1509,4$ м/с; $\rho = 1200$ кг/м³, $\mu = 0,63 \cdot 10^8$ Па, $\eta = 0,4$. Для собственной частоты (11) принят множитель 2,405. Все расчеты и построение графиков на рис. 1 (и далее, на рис. 4 и 5) выполнены на компьютере с помощью Mathcad 15.

Из рисунка следует, что приближенная формула (10) достаточно хороша для частот $\omega \leq \omega_p$.

При не слишком малых значениях η последующие сдвиговые резонансы в выражении (9) не существенны, и можно считать формулу (10) применимой также и на частотах $\omega > \omega_p$. Но в данном случае на этих частотах вклад в проводимость вносит еще и отдаленный (на частоте 19,5 кГц) полуволновой резонанс продольной волны, распространяющейся в пробке со скоростью $c_l = 1697$ м/с. В этом причина расхождения расчетных и экспериментальных данных на частотах $\omega > \omega_p$, поскольку продольной волной мы изначально пренебрегли, посчитав материал пробки несжимаемым.

Из формул (9), (10) и (11) видно, что проводимость цилиндрического резонатора обратно пропорциональна высоте пробки h , а собственная частота обратно

пропорциональна её радиусу a и не зависит от h . Последнее обстоятельство для $h \geq 2a$ подтверждают измерения автора (1976 г.), представленные на рис. 2. Слабый рост ω_p с увеличением h обязан (не учитываемой здесь) малой присоединенной массе на входе.

При $\omega \rightarrow 0$ из формулы (8) легко найти смещение пробки цилиндрического резонатора под действием гидростатического давления P_0 (Па):

$$U_0(r) = \frac{P_0}{4\mu(0)h}(a^2 - r^2)(\text{м}), \quad (12)$$

откуда максимальный прогиб в центре пробки $U_0(0) = P_0 a^2 / 4\mu(0)h$ (м), а средний по сечению прогиб $\overline{U_0(r)} = \frac{P_0 a^2}{8\mu(0)h}$ (м). Если определить значение ω_p методом Рэлея, взяв в качестве формы колебаний статическое смещение (12) [6, с. 189, 323], то снова придем к формуле (11).

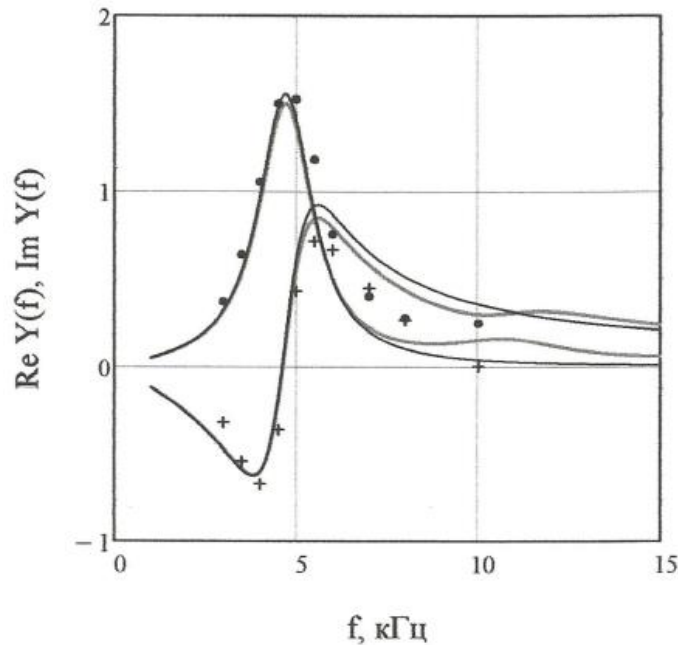


Рис. 1. Компоненты комплексной проводимости $Y(f)$ цилиндрического резонатора:
— — "точный" расчет (9); - - - приближенный расчет (10); •, + — измерения

1.3. "Внешний" резонатор

Для цилиндрических резонаторов с центральным круглым отверстием (рис. 3) общие решения уравнения (6) содержат наряду с функцией Бесселя $J_0(\kappa r)$ также функцию Неймана $N_0(\kappa r)$, а определение частных решений требует учета граничных условий на обеих боковых поверхностях пробки.

"Внешний" резонатор закреплен только своей внутренней боковой поверхностью радиуса a , как показано на рис. 3, а. Это дает первое граничное условие:

$$V_z(a) = 0. \quad (13)$$

Внешнюю боковую поверхность радиуса b считаем свободной от касательных напряжений, т.е. на ней $\sigma_{rz}(b) = \mu \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} = 0$, что для достаточно высоких

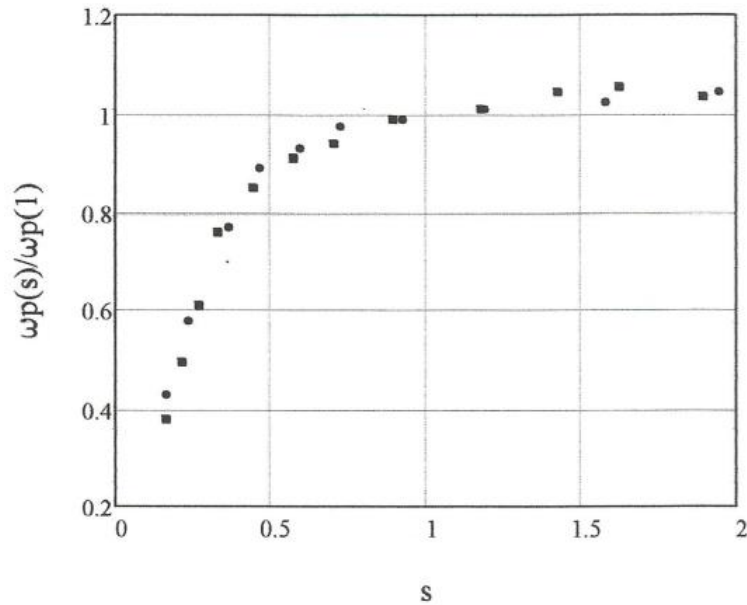


Рис. 2. Зависимость собственной частоты резонатора от его относительной высоты s :
 • – цилиндрический резонатор, $s = h/2a$;
 ■ – квадратный в сечении резонатор, $s = h/l$, l – сторона квадрата

пробок эквивалентно условию

$$\left. \frac{dV_z}{dr} \right|_{r=b} = 0. \tag{14}$$

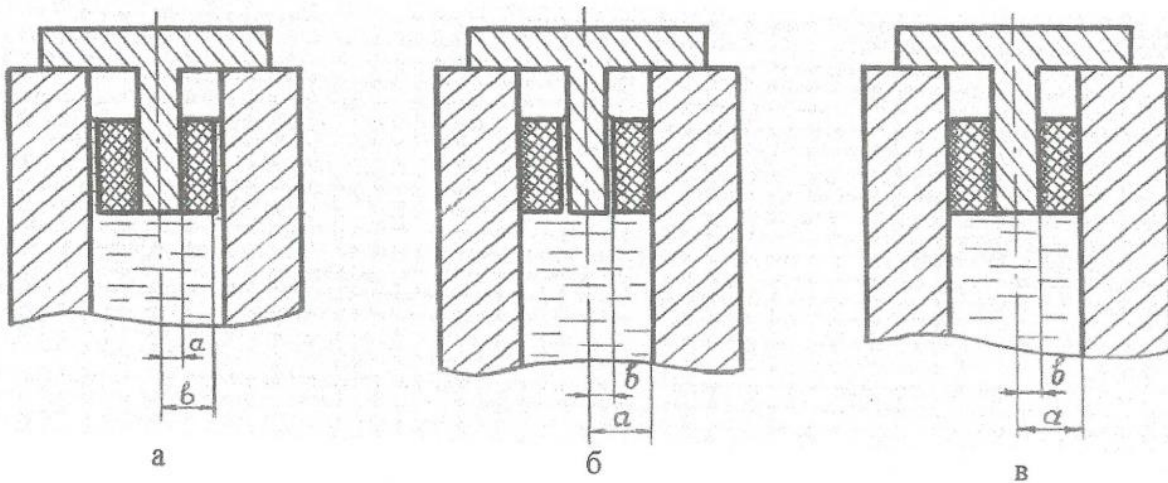


Рис. 3. Резонаторы с двумя боковыми поверхностями и способы их крепления в гидроакустической трубе: а – "внешний" резонатор; б – "внутренний" резонатор; в – кольцевой резонатор

Это второе граничное условие.

Решением уравнения (6) для "внешнего" резонатора, удовлетворяющем граничным условиям (13), (14), будет:

$$V_z(r) = \frac{P}{i\omega\rho h} \left\{ \frac{J_0(\kappa r)N_1(\kappa b) - J_1(\kappa b)N_0(\kappa r)}{J_0(\kappa a)N_1(\kappa b) - J_1(\kappa b)N_0(\kappa a)} - 1 \right\}. \tag{15}$$

Вычислив среднюю по сечению пробки продольную скорость по формуле:

$$\overline{V_z(r)} = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b V_z(r) r dr,$$

найдем затем приведенную проводимость "внешних" резонаторов, распределенных по площади с поверхностной концентрацией ε :

$$Y = \frac{\varepsilon \rho_0 c_0}{i \omega \rho h} \left\{ \frac{2 \kappa a}{\kappa^2 (b^2 - a^2)} \cdot \frac{J_1(\kappa b) N_1(\kappa a) - J_1(\kappa a) N_1(\kappa b)}{J_0(\kappa a) N_1(\kappa b) - J_1(\kappa b) N_0(\kappa a)} - 1 \right\}. \quad (16)$$

Воспользовавшись известными разложениями для цилиндрических функций [7, с. 413, 428], фигурную скобку выражения (16) можно представить в виде:

$$\{\dots\} = \frac{\Psi(c) x^2}{2[1 - A(c) x^2 + B(c) x^4 - D(c) x^6 + \dots]}, \quad (17)$$

где

$$x = \frac{\kappa a}{2}, \quad (18)$$

$$c = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\Psi(c) = \frac{2c^2}{c-1} \ln c - 3c + 1, \quad (19)$$

$$A(c) = c \ln c - c + 1 - \frac{1}{\Psi(c)} \left(\frac{c^3 + 2c^2 - c}{c-1} \ln c - \frac{8}{3} c^2 + \frac{c+1}{3} \right). \quad (20)$$

Оставив в знаменателе выражения (17) только два первых слагаемых, запишем:

$$\{\dots\} \approx \frac{\Psi(c) x^2}{2[1 - A(c) x^2]}, \quad (21)$$

Подставив это в формулу (16) и учитывая (1), (7), (18), найдем:

$$Y(\omega) \approx \frac{\varepsilon \rho_0 c_0 \omega a^2 \Psi(c)}{8 \mu(\omega) h} \cdot \frac{-i}{1 - \frac{\omega^2 \mu(\omega_p)}{\omega_p^2 \mu(\omega)} - i \eta(\omega)}, \quad (22)$$

где

$$\omega_p = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho A(c)}}. \quad (23)$$

С другой стороны, из формулы (16) следует, что при $\eta \ll 1$ собственную частоту основного резонанса должен определять первый корень уравнения:

$$J_0(\kappa a) N_1(\kappa b) = J_1(\kappa b) N_0(\kappa a),$$

который согласно справочнику [8, с. 238] равен:

$$\kappa_p a = \pi \frac{[1 + \alpha(c)]}{2(\sqrt{c} - 1)},$$

где функция $1 + \alpha(c)$ представлена в [8] графиком на рис. 136. Поэтому для ω_p также получим:

$$\omega_p = \frac{\pi[1 + \alpha(c)]}{2a(\sqrt{c} - 1)} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho}}. \quad (24)$$

Сравнив это с выражением (23), найдем:

$$A(c) = \left\{ \frac{4(\sqrt{c} - 1)}{\pi[1 + \alpha(c)]} \right\}^2.$$

Аппроксимируя функцию $1 + \alpha(c)$ в диапазоне $c = 1 \dots 4$ зависимостью $1 + \alpha(c) = \frac{3\sqrt{c} + 1}{4\sqrt{c}}$, получим

$$\omega_p = \frac{\pi(3b + a)}{8b(b - a)} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho}}, \quad (25)$$

$$A(c) = 2,882c \left(\frac{\sqrt{c} - 1}{\sqrt{c} + \frac{1}{3}} \right)^2. \quad (26)$$

Для $c = 1 \dots 4$ значения $A(c)$, вычисленные по формулам (20) и (26) разнятся менее чем на 2%, что служит лишним доводом справедливости перехода (17) \rightarrow (21).

Но, видимо, лучший вариант – это найти (как в п. 1.2) для ω_p второе приближение, используя решение уравнения $1 - A(c)x^2 + B(c)x^4 = 0$.

При $c \rightarrow 1$ для функций (19), (20) имеют место разложения:

$$\Psi(c) = \frac{2}{3}(c - 1)^2 \left[1 + \frac{1}{4}(c - 1) + \frac{1}{10}(c - 1)^2 + \frac{1}{20}(c - 1)^3 + \dots \right], \quad (27)$$

$$A(c) = \frac{2}{5}(c - 1)^2 \left[1 + \frac{7}{24}(c - 1) + \frac{439}{3360}(c - 1)^2 + \frac{319}{4480}(c - 1)^3 + \dots \right]. \quad (28)$$

Случай $c = b^2/a^2 \rightarrow 1$ соответствует "внешнему" резонатору в виде длинной полосы шириною $d/2 = b - a$, одна боковая поверхность которой закреплена, а другая свободна. Собственная частота такого резонатора согласно формул (24), (25) равна:

$$\omega_p = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho}}, \quad (29)$$

Почти то же самое получается и из формулы (23) с учетом разложения (28):

$$\omega_p = \frac{\sqrt{10}}{d} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho}}. \quad (30)$$

Из соображений симметрии ясно, что такую же собственную частоту будет иметь и полосовой резонатор удвоенной ширины, у которого обе боковые поверхности закреплены, т.к. он может быть составлен из двух "внешних" резонаторов, примыкающих друг к другу свободными краями. Проводимость полосовых резонаторов найдем по формуле (22) с учетом разложения (27):

$$Y(\omega) = \frac{\varepsilon\rho_0c_0\omega d^2}{12\mu(\omega)h} \cdot \frac{-i}{1 - \frac{\omega^2\mu(\omega_p)}{\omega_p^2\mu(\omega)} - i\eta(\omega)}. \quad (31)$$

Формулы (29), (31) будут получены ниже другим способом при рассмотрении резонаторов, прямоугольных в плане.

При $c \gg 1$ из выражений (19), (20) следует:

$$\Psi(c) \approx c(2 \ln c - 3),$$

$$A(c) \approx \frac{\Psi(c)}{2} \left[1 + \frac{7c^2}{3\Psi(c)^2} \right].$$

Эти функции обеспечивают верные значения ω_p и $Y(\omega)$ в пределе при $a \rightarrow 0$, $c \rightarrow \infty$:

$$\omega_p \approx \frac{2}{b} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho \ln c}} \rightarrow 0,$$

$$Y(\omega) \approx \frac{\varepsilon\rho_0c_0}{-i\omega\rho h} \cdot \frac{\Psi(c)}{2A(c)} \rightarrow \frac{\varepsilon\rho_0c_0}{-i\omega\rho h}.$$

Действительно, упругая энергия резонатора, концентрирующаяся вблизи его места закрепления, стремится к нулю вместе с $a \rightarrow 0$, что обеспечивает $\omega_p \rightarrow 0$ и совпадение проводимости резонатора с массовой проводимостью его пробки.

Таким образом, функции $\Psi(c)$ (19) и $A(c)$ (20) хорошо описывают поведение "внешнего" резонатора при всех значениях $c = b^2/a^2 > 1$. Это оправдывает представление фигурной скобки выражения (16) в резонансном виде (21), где $A(c)x^2$ при малых $|x^2|$ играет роль рэлеевской поправки [9]. Квазистатическое решение, дополненное "динамической" рэлеевской поправкой, оказывается справедливым в гораздо более широкой полосе частот, чем, казалось бы, можно было предположить.

Средний по сечению прогиб "внешнего" резонатора под действием гидростатического давления P_0 равен:

$$\overline{U}_0 = \frac{a^2\Psi(c)}{8\mu(0)h} P_0(\text{м}).$$

1.4. "Внутренний" резонатор

У "внутреннего" резонатора закреплена внешняя боковая поверхность, а внутренняя поверхность остается свободной от касательных напряжений (рис. 3, б). Если использовать обратные по сравнению с рис. 3, (а) обозначения радиусов, а именно, через a обозначить внешний, а через b – внутренний радиусы пробки, то легко установить, что для расчета "внутреннего" резонатора получим те же формулы, что и для "внешнего", с той лишь разницей, что теперь в них будет $c = b^2/a^2 < 1$. Действительно, при принятом обозначении радиусов пробки граничные условия для её сдвиговых колебаний также запишутся в виде (13), (14), а решением уравнения (6) будет выражение (15).

При вычислении собственной круговой частоты "внутреннего" резонатора по формуле (24) значения функции $1 + \alpha(c)$ следует брать из левой половины графика на рис. 136 справочника [8]. Но проще и точнее найти для (ω_p) второе приближение.

При $c \rightarrow 0$ "внутренний" резонатор переходит в цилиндрический пункта 1.2. Поскольку в этом случае $\Psi(c) \rightarrow 1, A(c) \rightarrow 2/3$, то для проводимости и собственной частоты резонатора снова получаем соответственно формулы (10) и (11).

1.5. Кольцевой резонатор

Обе боковые поверхности этого резонатора – внешняя радиуса a и внутренняя радиуса b – закреплены, как показано на рис. 3, в. Поэтому граничными условиями уравнения (6) для кольцевого резонатора будут:

$$V_z(a) = 0, V_z(b) = 0,$$

а его решением –

$$V_z(r) = \frac{P}{i\omega\rho h} \left\{ \frac{[J_0(\kappa a) - J_0(\kappa b)]N_0(\kappa r) - [N_0(\kappa a) - N_0(\kappa b)]J_0(\kappa r)}{J_0(\kappa a)N_0(\kappa b) - J_0(\kappa b)N_0(\kappa a)} - 1 \right\}. \quad (32)$$

Поступая так же, как в п. 1.3, получим для расчета кольцевого резонатора формулы, аналогичные выражениям (22), (23), где роль $\Psi(c)$ и $A(c)$ будут играть, соответственно, функции:

$$\Psi_0(c) = \frac{2(1-c)}{\ln c} + 1 + c, \quad c = \frac{b^2}{a^2} < 1, \quad (33)$$

$$A_0(c) = \Psi_0(c) - \frac{1}{\Psi_0(c)} \left(\frac{1-c^2}{\ln c} + \frac{1+4c+c^2}{3} \right). \quad (34)$$

Также понадобится:

$$B_0(c) = [\Psi_0(c) - A_0(c)] \left[\frac{3}{4}\Psi_0(c) - A_0(c) \right] - \frac{1}{72} \frac{\varphi(c)}{\Psi_0(c) \ln c},$$

где

$$\varphi(c) = (1-c)(11 + 38c + 11c^2) + 3(1 + 9c + 9c^2 + c^3) \ln c.$$

При $c \rightarrow 1$ кольцевой резонатор переходит в полосовой шириною $d = a - b$. Для этого случая справедливы разложения:

$$\Psi_0(c) = \frac{1}{6}(1-c)^2 \left[1 + \frac{1}{2}(1-c) + \frac{19}{60}(1-c)^2 + \frac{9}{40}(1-c)^3 + \dots \right],$$

$$A_0(c) = \frac{1}{10}(1-c)^2 \left[1 + \frac{1}{2}(1-c) + \dots \right],$$

использование которых приводит к уже известным формулам (30) и (31).

Интересно также отметить, что при $c \rightarrow 0$ кольцевой резонатор, несмотря на то, что его центральная часть закреплена по осевой линии, ведет себя как цилиндрический резонатор, поскольку из формул (33), (34) при $c \rightarrow 0$ следует: $\Psi_0(c) \rightarrow 1, A_0(c) \rightarrow 2/3$. Это, по-существу, тот же "вырожденный" эффект, что и для "внешнего" резонатора, закрепленного по осевой линии.

Из выражения (32) видно, что собственную частоту кольцевого резонатора можно также определить по первому корню $\kappa_p b$ уравнения

$$J_0(\kappa b \cdot \frac{a}{b})N_0(\kappa b) - J_0(\kappa b)N_0(\kappa b \cdot \frac{a}{b}) = 0,$$

который согласно справочнику [8, с. 237, рис. 134; с. 242, табл. 52] можно представить в виде:

$$\kappa_p b = \frac{S(k)}{k-1},$$

где $k = \frac{a}{b}$, $S(k)$ – функция, график которой показан на рис. 134. С учетом (7) это дает очень простую и удобную формулу для определения собственной частоты кольцевого резонатора:

$$\omega_p = \frac{S(k)}{a-b} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho}}. \quad (35)$$

Приближенное значение этой величины получим, заменив в (35) $S(k)$ на функцию:

$$S_0(k) = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\sqrt{A_0(k)}}. \quad (36)$$

Функции $S(k)$ и $S_0(k)$ представлены на рис. 4. Налицо систематическое небольшое превышение приближенных значений над точными в пределах 0,66...1,23% (как и при определении наименьшей собственной частоты конструкции по методу Рэлея [9]).

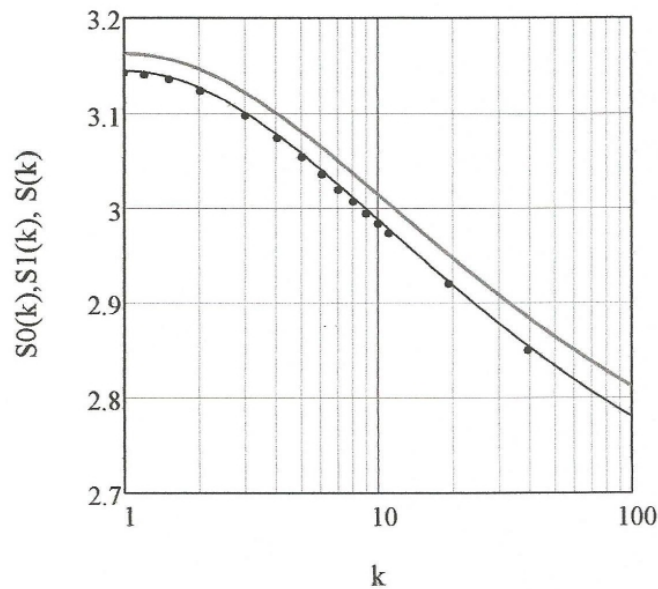


Рис. 4. Графики функций:
— — $S_0(k)$, (36); - - $S_1(k)$; • — $S(k)$, [8, табл. 52]

На рис. 4 также показана кривая $S_1(k)$ для второго приближения ω_p по п. 1.2 и п. 1.3, полученная заменой в (36) $A_0(c) \rightarrow A_1(c)$, где

$$A_1(c) = \frac{2B_0(c)}{A_0(c) - \sqrt{A_0(c)^2 - 4B_0(c)}},$$

что следует подставить в (23) вместо первого приближения $A_0(c)$. Из рисунка видно, что второе приближение существенно (примерно в 7...9 раз) точнее первого: превышение $S_1(k)$ над $S(k)$ составляет всего 0,07...0,18%.

1.6. Прямоугольный в плане резонатор

Рассмотрим теперь резонатор с прямоугольной в плане пробкой, ограниченной в сечении осями координат и прямыми $x = d, y = l$. В самом общем случае аксиальные смещения достаточно высокой пробки с закрепленной боковой поверхностью можно задать в виде двойного ряда:

$$U_z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t) \sin \frac{\pi m x}{d} \sin \frac{\pi n y}{l}.$$

Считая величины $a_{mn}(t)$ обобщенными координатами, применим для их определения принцип наименьшего действия, как это сделано в книге [10] при изучении вынужденных колебаний прямоугольной мембраны. Опуская выкладки, приведем конечные результаты:

$$Y(\omega) = \frac{64\varepsilon\rho_0c_0}{\pi^6\mu(\omega)h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i\omega}{m^2n^2 \left(\frac{m^2}{d^2} + \frac{n^2}{l^2} \right) \left[1 - \frac{\omega^2\mu(\omega_{mn})}{\omega_{mn}^2\mu(\omega)} - i\eta(\omega) \right]} \quad (37)$$

комплексная проводимость резонаторов прямоугольного сечения, где

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{\frac{\mu(\omega_{mn})}{\rho} \left(\frac{m^2}{d^2} + \frac{n^2}{l^2} \right)}$$

собственные частоты разных мод сдвиговых колебаний пробки;

$$\bar{U}_0 = \frac{64P_0}{\pi^6\mu(0)h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n^2 \left(\frac{m^2}{d^2} + \frac{n^2}{l^2} \right)} \quad (38)$$

средний по сечению прогиб пробки резонатора под действием гидростатического давления P_0 .

В этих формулах штрихи у знаков суммирования указывают на то, что числа m и n должны принимать только нечетные значения.

Ввиду быстрой сходимости рядов в выражении (37) основной вклад в проводимость вносит низшая мода сдвиговых колебаний ($m = n = 1$), имеющая собственную частоту:

$$\omega_p = \pi \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{l^2} \right)}. \quad (39)$$

В подтверждение сказанного на рис. 5 приведен пример сравнения частотных зависимостей полной проводимости $Y(\omega)$ (37) и её низшей моды $Y_1(\omega)$ ($m = n = 1$) для следующих значений параметров: $\varepsilon = 1$; $d = 4$ см, $l = 6,5$ см, $h = 8$ см; $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $c_0 = 1500$ м/с, $\mu = 1,25 \cdot 10^7$ Па, $\rho = 1200$ кг/м³, $\eta = 0,3$.

При $l \rightarrow \infty$ получим полосовой резонатор шириною d . В этом случае формула (39) переходит в (29), а из выражения (37) практически следует (31). Действительно,

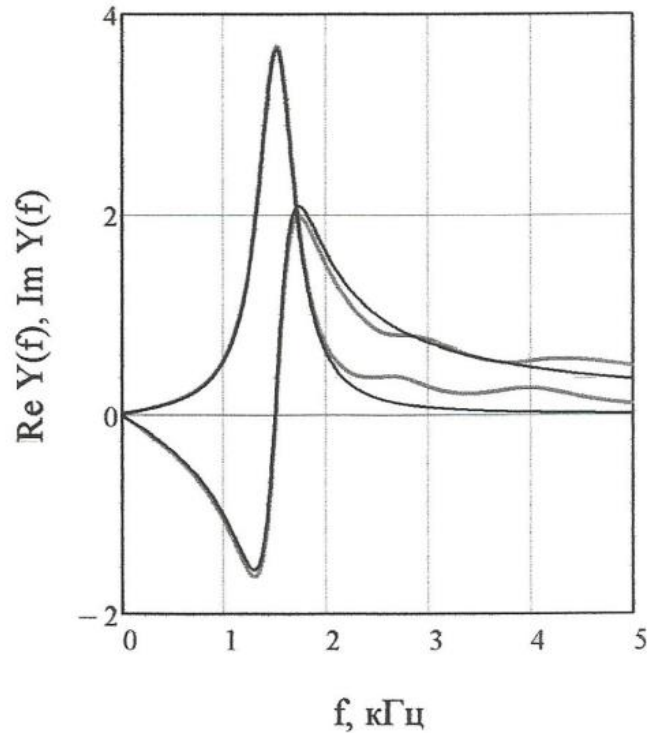


Рис. 5. Проводимости прямоугольного в сечении резонатора:

— — полная проводимость $Y(f)$ (37)
 - - проводимость низшей моды $Y_1(f)$ ($m = n = 1$)

если при суммировании по m ограничиться лишь первым членом с $m = 1$ и учесть, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ [11, с. 16], то числовой множитель в правой части выражения (37) для $Y(\omega)$ окажется равным $\frac{8}{\pi^4} = \frac{1}{12,18}$, что почти совпадает с числовым множителем $\frac{1}{12}$ в формуле (31).

Учитывая также, что $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{96}$, [11 с. 17], из выражения (38) найдем величину среднего прогиба полосы:

$$\bar{U}_0 = \frac{P_0 d^2}{12\mu(0)h} (\text{м}).$$

Заключение

Получены приближенные формулы для расчета приведенных комплексных проводимостей $Y(\omega)$ и собственных частот ω_p вязкоупругих резонаторов. Формулы основаны на предположениях:

- высота пробки резонатора сравнима или больше её поперечных размеров, что позволяет считать смещения в ней преимущественно аксиальными;
- материал пробки практически несжимаем, т.е. хорошо выполняется соотношение (2), и продольные резонансы в пробке имеют место на частотах, намного превышающих сдвиговую собственную частоту ω_p ;
- в разложении полученного в этих предположениях "точного" решения допустимо оставить только два слагаемых, что приводит (переходом типа (17) \rightarrow (21)) к

вычленению низшей сдвиговой моды колебаний в виде резонансного выражения;
– собственной частотой ω_p резонатора следует считать её точное значение для низшей моды.

Найден простой, но очень точный способ определения второго приближения для ω_p , основанный на приравнении нулю суммы первых трёх слагаемых в знаменателе формулы (17).

Низшая мода хорошо аппроксимирует "точное" значение проводимости на частотах $\omega \leq \omega_p$, а также при $\omega > \omega_p$, если значения η не слишком малы, когда ролью последующих сдвиговых резонансов в пробке можно пренебречь.

Рассмотренные здесь вязкоупругие резонаторы могут найти применение в разного рода звуко- и виброгасящих устройствах, а также при измерении комплексных модулей сдвига (и модулей всестороннего сжатия) вязкоупругих материалов [12].

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. 4-е изд., испр. и дополн. М.: Наука, 1987. 248 с.
2. Гинзбург В.Л. Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.
3. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. / Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 461 с.
4. Исакович М.А. Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, 1973. 495 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. 2-е изд. перераб. М.: Наука, 1965. 560 с.
7. Арфкен Г. Математические методы в физике. / Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
8. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). 2-е изд. стереотипн. / Пер. с нем. М.: Наука, 1968. 344 с.
9. Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. 2-е изд. / Пер. с англ. М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
10. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. 2-е изд. / Пер. с англ. М.: Наука, 1967. 444 с.
11. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. / Пер. с англ. М.: Наука, 1964. 228 с.
12. Казаков Л.И. Способ определения динамических модулей упругости вязкоупругих материалов. Авт. свид. № 514225. БИ № 18, 1976 г.

References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of elasticity. 4 ed., revised and enlarged. M.: Science, 1987. 248 P. [in Russian]
2. Ginzburg V.L. On the General Relationship between Absorption and Dispersion of Sound Waves // Acoust. Phys. 1955. Vol. 1. No. 1. P. 31-39.
3. Nussenzveig H.M. Causality and Dispersion Relations. / Translated from English. M.: Mir, 1976. 461 P. [in Russian]

4. Isakovich M.A. General Acoustics. Textbook. M.: Science, 1973. 495 P. [in Russian]
5. Landau L.D., Lifshitz E.M. Hydrodynamics. 3 ed., revised, Moscow: Nauka, 1986. 736 P. [in Russian]
6. Babakov I.M. Theory of Oscillations. 2 ed., revised., Moscow: Nauka, 1965. 560 P. [in Russian]
7. Arfken G. Mathematical Methods in Physics. / Translated from English. M.: Atomizdat, 1970. 712 P. [in Russian]
8. Janke E., Emde F., Lesh F. Special Functions (Formulas, Graphs, Tables). 2 ed. stereotype. / Translation from German. M.: Science, 1968. 344 P. [in Russian]
9. Strutt. J.V. (Lord Rayleigh). Sound Theory. Vol. 1. 2 ed. / Translated from English. M.: GITTL, 1955. 504 P. [in Russian]
10. Timoshenko S.P. Oscillations in Engineering. 2 ed. / Translated from English. M.: Science, 1967. 444 P. [in Russian]
11. Dwight H.B. Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas. / Translated from English. M.: Science, 1964. 228 P. [in Russian]
12. Kazakov L.I. A Method of Determining Dynamic Elastic Moduli of Viscoelastic Materials. Inventor's certificate No. 514225. BI No. 18, 1976.