

## Об источниках аэродинамического шума в вязком теплопроводном газе

Воронков С.С.

Зав. кафедрой дорожного строительства ПсковГУ  
180000 г. Псков, пл. Ленина, д. 2

### Аннотация

Используя акустическую аналогию Лайтхилла, из законов сохранения количества движения, массы и энергии получено волновое неоднородное уравнение относительно пульсаций давления. Привлечение при выводе уравнения энергии позволило выявить три новых источника аэродинамического шума. Приводятся результаты вычислительного эксперимента по моделированию турбулентного режима свободного потока вязкого теплопроводного газа. Даются количественные оценки значений установленных источников аэродинамического шума.

**Ключевые слова:** источник аэродинамического шума, волновое неоднородное уравнение, вязкий теплопроводный газ, вычислительный эксперимент.

### *On the sources of aerodynamic noise in a viscous heat-conducting gas*

Voronkov S.S.

Head of the Department of road construction, Pskov State University, Russia

### Abstract

Using the acoustic analogy of Lighthill, a wave inhomogeneous equation with respect to pressure pulsations was obtained from the laws of conservation of momentum, mass, and energy. Involvement in the derivation of the energy equation made it possible to identify three new sources of aerodynamic noise. The results of a computational experiment on modeling the turbulent regime of a free flow of a viscous heat-conducting gas are presented. Quantitative estimates of the values of the established sources of aerodynamic noise are given.

**Key words:** source of aerodynamic noise, wave inhomogeneous equation, viscous heat-conducting gas, computational experiment.

### Введение

Акустическая аналогия Лайтхилла [1] позволила установить источники аэродинамического шума и выработать методы борьбы с ним. Уравнение Лайтхилла выводится из уравнений сохранения массы и количества движения и представляет собой волновое неоднородное уравнение, правая часть которого содержит различные источники звука. Выпишем уравнение Лайтхилла [1]:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}, \quad (1)$$

где  $\rho'$  – флуктуация плотности,  $c_0$  – скорость звука,

$T_{ij} = \rho v_i v_j + \delta_{ij} [(p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)] - e_{ij}$  – тензор турбулентных напряжений Лайтхилла.

При выводе уравнения Лайтхилла не учитывается диссипация энергии и теплообмен, которые всегда присутствуют в аэродинамическом потоке и количественно входят в уравнение энергии. В уравнениях Филлипса и Лилли устранен этот недостаток. При выводе этих уравнений привлекается второй закон термодинамики, записанный относительно изменения энтропии [1]. Производная энтропии по времени входит в правую часть этих уравнений, и таким образом, косвенно учитывает диссипацию энергии и теплообмен. Но более детального анализа влияния диссипации энергии и теплообмена на возникновение шума не проводилось. Проведем анализ влияния диссипации энергии и теплообмена на шумообразование в аэродинамическом потоке с привлечением уравнения для пульсаций давления, полученного в работе [2].

### 1. Вывод уравнения

Будем использовать акустическую аналогию Лайтхилла и получим из общих законов сохранения волновое неоднородное уравнение, в правую часть которого будут входить источники аэродинамического шума. В отличие от подхода Лайтхилла, наряду с законами сохранения массы и количества движения, также будем использовать закон сохранения энергии. Выпишем уравнения:

1. Уравнение Навье-Стокса – закон сохранения количества движения, в предположении постоянства коэффициента динамической вязкости  $\mu = \text{const}$  и при отсутствии гравитационных сил [3]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \text{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{3\rho} \text{grad} \text{div} \mathbf{V}. \quad (2)$$

2. Уравнение для пульсаций давления – закон сохранения энергии, в предположении постоянства коэффициента теплопроводности  $\lambda = \text{const}$  [2]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \text{grad} p - a_s^2 \frac{dp}{dt} = (ka - 1)\Phi, \quad (3)$$

где  $p, \rho$  – давление и плотность газа;  $a_s$  – адиабатное и изэнтропное значение скорости звука;  $\Phi$  – функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен:

$$\Phi = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \left. \begin{aligned} & + \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}; \end{aligned} \right\}$$

$T$  – температура газа;  $\mathbf{V}$  – вектор скорости газа с проекциями  $u, v, w$  на оси декартовой системы координат  $x, y, z$  соответственно;  $\lambda$  – коэффициент

теплопроводности;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $t$  – время;  $ka$  – показатель адиабаты.

3. Уравнение неразрывности – закон сохранения массы [3]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (4)$$

Выразим субстанциональную производную плотности из уравнения (4) и подставим в уравнение (3). В результате получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \operatorname{grad} p + \rho a_s^2 \operatorname{div} \mathbf{V} = (ka-1)\Phi \quad (5)$$

Выполним следующие преобразования уравнений (2) и (5): уравнение (2) продифференцируем оператором набла  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ , уравнение (5) продифференцируем по времени  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Привлекая формулы векторного анализа, после соответствующих преобразований, вычитая из уравнения (5) уравнение (2), получим:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - a_s^2 \nabla^2 \mathbf{p} = \rho a_s^2 \left[ \nabla^2 \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \mathbf{V} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V} - (\operatorname{rot} \mathbf{V})^2 + \operatorname{grad} p \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} - \nabla \left( \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{3\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \right] + (ka-1) \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V} \operatorname{grad} p) - \frac{\partial (\rho a_s^2)}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{V}. \quad (6)$$

Уравнение (6) – волновое неоднородное уравнение, аналогичное уравнению Лайтхилла (1). Отличие заключается в том, что оно записано относительно пульсаций давления и в правой части появились дополнительные члены. Члены в правой части в квадратных скобках аналогичны членам уравнения Лайтхилла, но записанные несколько в ином виде. Представляют интерес дополнительные члены, включающие производные по времени. Их появление обусловлено использованием уравнения энергии при выводе (6). Первый член учитывает непосредственно диссипацию энергии и теплообмен, второй член учитывает изменение конвективной производной давления, третий член учитывает сжимаемость среды, и изменение плотности и скорости звука во времени. Для оценки вклада каждого из этих членов в генерацию шума турбулентным потоком проведем вычислительный эксперимент, позволяющий количественно оценить эти члены.

## 2. Вычислительный эксперимент

Математическая модель, описывающая свободный турбулентный поток в вязком теплопроводном газе включает: уравнения Навье-Стокса, энергии, неразрывности и состояния для совершенного газа. В этой системе из шести уравнений неизвестных 6 величин:  $p, \rho, T, u, v, w$  – давление, плотность, температура, проекции

скорости потока на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  декартовой системы координат (при условии, что  $\mu = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$ ). Численное решение системы уравнений осуществлялось по двухшаговой схеме Браиловской [4]. Программа реализована в среде MathCad Professional. Более подробное описание математической модели приведено в работе [5].

В качестве начальных условий задавалась скорость потока, изменяющаяся по закону  $uM + u'$  в направлении оси  $x$ , где  $uM = 10$  м/с – постоянная скорость потока,  $u'$  – пульсационная составляющая скорости, изменяющаяся по закону  $u' = u\alpha \cdot \cos(\alpha)$ , где  $u\alpha = 0,1$  м/с – амплитуда возмущения скорости,  $\alpha = \text{rnd}(2\pi)$  – фаза возмущения скорости, задаваемая как псевдослучайное число с равномерным распределением в интервале  $[0, 2\pi]$ . Начальные значения скорости в направлениях осей  $y$  и  $z$  принимались нулевыми. Начальные значения термодинамических параметров  $p, \rho, T$  принимались постоянными. На входной границе скорость вдоль осей  $x, y, z$  задавалась по приведенному выше закону, давление на выходной и боковых границах задавалось постоянным, граничные значения других переменных задавались экстраполяцией из внутренней области.

Количество узлов конечно-разностной прямоугольной сетки  $i, j, k$  по осям  $x, y$  и  $z$  принималось 11. Шаг конечно-разностной сетки принимался равномерным по осям  $x, y$  и  $z$ :  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1$  м. Шаг по времени определялся из условия устойчивости и принимался равным  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$  с. Количество шагов по времени принималось  $n = 100$ .

Через определенный промежуток времени возникают пульсации скоростей вдоль осей  $y$  и  $z$ . На рисунках 1, 2, 3 приведены значения пульсаций скоростей.

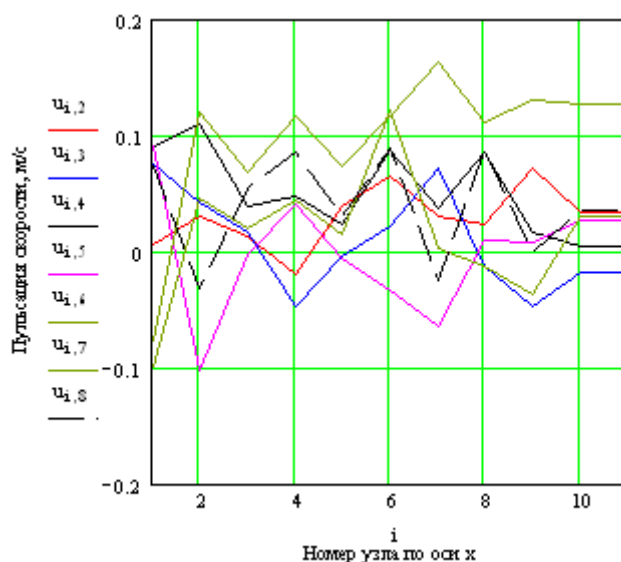


Рис. 1. Изменение пульсации скорости  $u$  вдоль оси  $x$  в сечении  $k=6$  в момент времени  $n = 100$

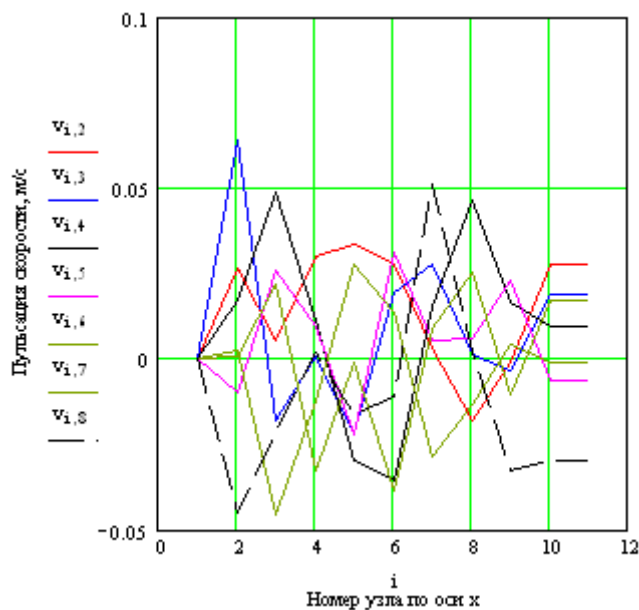


Рис. 2. Изменение пульсации скорости  $v$  вдоль оси  $x$  в сечении  $k=6$  в момент времени  $n = 100$

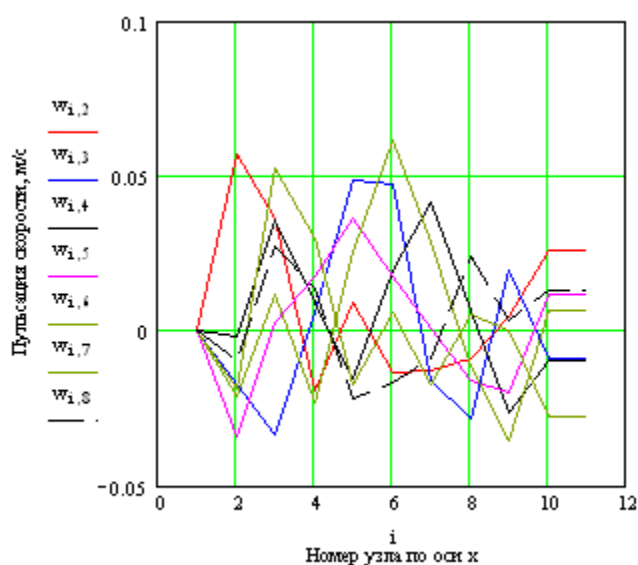


Рис. 3. Изменение пульсации скорости  $w$  вдоль оси  $x$  в сечении  $k=6$  в момент времени  $n = 100$

На рис. 4 приведены значения поля скоростей, соответствующих турбулентному режиму свободного потока вязкого теплопроводного газа.

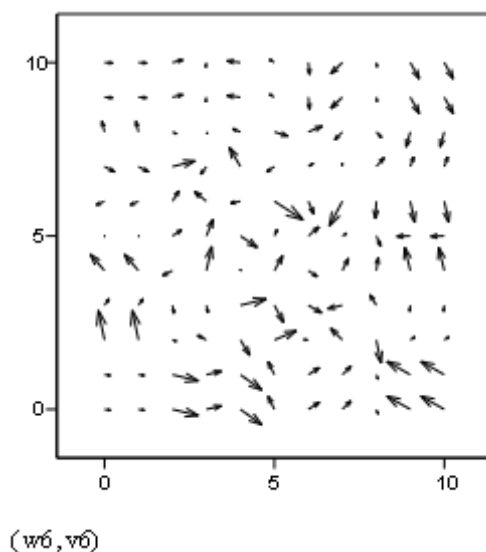


Рис. 4. Поле скоростей в сечении  $i=6$  в момент времени  $n = 100$

Проведем анализ изменения источников аэродинамического шума в турбулентном потоке. Обозначим дополнительные члены, входящие в правую часть уравнения (6) как источники шума 1, 2, 3. При вычислении этих членов производные по пространству аппроксимировались центральными разностями, производные по времени – односторонними разностями.

На рис.5 приведен характер изменения во времени члена «источника шума 1».

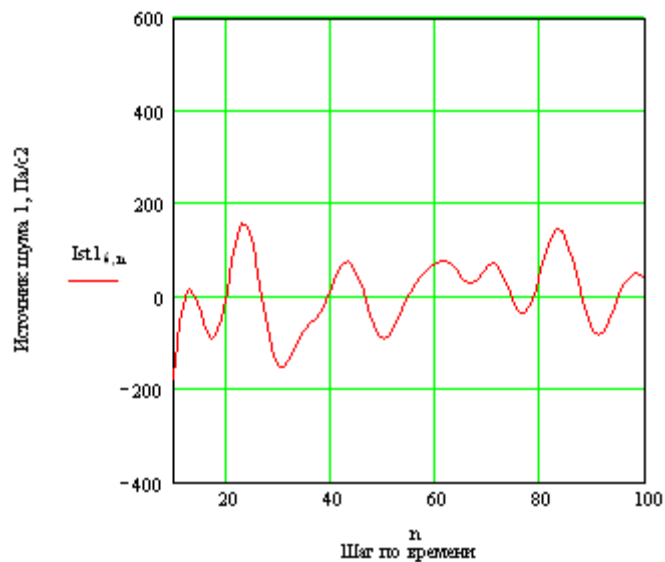


Рис. 5. Характер изменения «источника шума 1»  $= (ka - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  во времени в центральной точке расчетной области  $i=6, j=6, k=6$

На рис.6 приведен характер изменения во времени «источника шума 3».

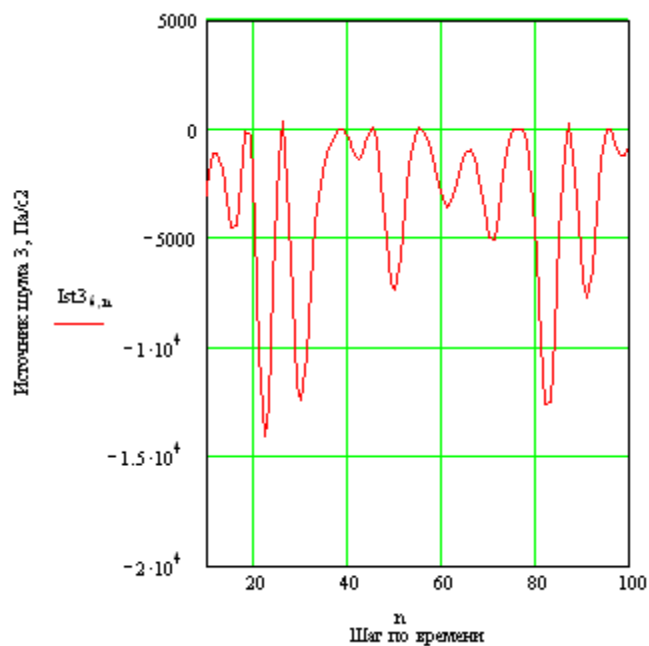


Рис. 6. Характер изменения «источника шума 3»  $= \frac{\partial(\rho a_s^2)}{\partial t} \text{div} V$  во времени в центральной точке расчетной области  $i=6, j=6, k=6$

На рис.7 приведен характер изменения во времени «источника шума 2» в сравнении с «источниками шума 1 и 3».

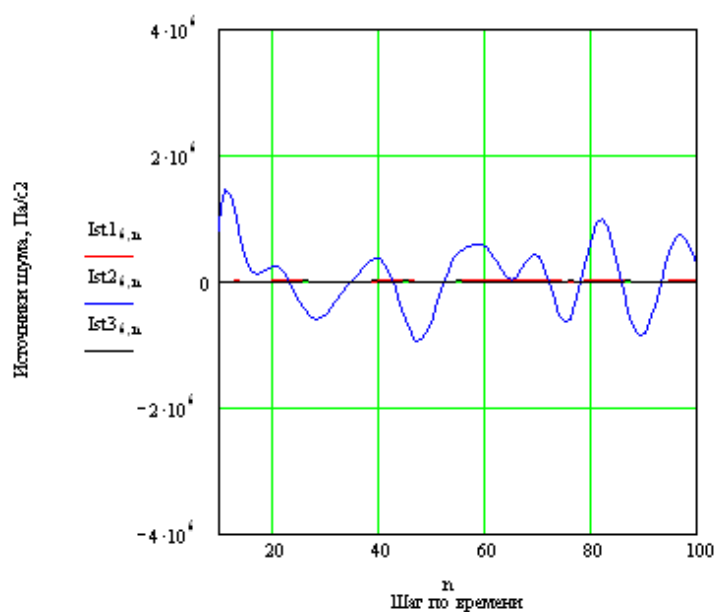


Рис. 7. Характер изменения «источника шума 2»  $= \frac{\partial}{\partial t} (V \text{grad} p)$  во времени в центральной точке расчетной области  $i=6, j=6, k=6$  в сравнении с «источниками шума 1 и 3»

Сравнение значений источников шума между собой (рис. 7) показывает, что количественно превалирует «источник шума 2», определяемый производной по времени от конвективной производной давления.

### **Заключение**

Получено волновое неоднородное уравнение относительно пульсаций давления из законов сохранения количества движения, массы и энергии. Привлечение при выводе уравнения энергии позволило выявить три новых источника аэродинамического шума.

Показано, что количественно превалирует «источник шума 2», определяемый производной по времени от конвективной производной давления.

### **Список литературы**

1. Голдстейн Мэрвин Е. Аэроакустика: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1981. – 294 с.
2. Воронков С.С. О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом. Электронный журнал «Техническая акустика», – Режим доступа. – URL: <http://www.ejta.org>, 2004, 5.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
5. Воронков С.С. Об источнике шума в пограничном слое вязкого теплопроводного газа. Научный журнал «Noise Theory and Practice», – Режим доступа. – URL: <http://www.noisestp.com/ru/issues/>, Том 3 №2 (II, 2017). С. 44-50.