

УДК 534.23

OECD 01.03.AA

О равномерном распределении энергии случайных вибраций и шумов

Казаков Л. И.

К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН, г. Владивосток

Аннотация

Приведены экспериментальные и теоретические данные, подтверждающие равномерное распределение энергии по степеням свободы для случайных вибраций и шумов. Показаны преимущества возбуждения вибраций судовых конструкций широкополосным воздушным шумом. При этом экспериментально установлено совпадение спектров виброускорений пластин и звуковых давлений шума, что обеспечивает возможность взаимной калибровки акустических приемников. Показано незамеченное ранее равномерное распределение кинетической энергии по возбужденным степеням свободы при одиночных ударах по струне, продольному стержню, консоли.

Ключевые слова: случайные вибрации, шумы, собственные колебания тел, равномерное распределение энергии, взаимная калибровка звукоприемников.

About equidistribution of energy of random vibrations and noise

Kazakov L.I.

K. F.-M. N., leading researcher, Pacific Oceanological Institute named after V. I. Il'ichev FEB RAS, Vladivostok 9

Abstract

Experimental and theoretical data confirming the equidistribution of energy by degrees of freedom for random vibrations and noises are presented. The advantages of vibration excitation of ship structures by broadband air noise are shown. Thus experimentally established coincidence of the spectra of vibration accelerations of the plates and the sound pressure of the noise, allowing inter-calibration of acoustic receivers. The previously undetected equidistribution of kinetic energy over excited degrees of freedom is shown for single strikes on a string, a longitudinal rod, and a console.

Key words: *random vibrations, noises, natural vibrations of bodies, equidistribution of energy, intercalibration of acoustic receivers.*

Введение

Классический закон Больцмана о равномерном распределении кинетической энергии тепловых движений по степеням свободы нашел широкое применение как к объектам молекулярных размеров, так и к макроскопическим телам, находящимся в термодинамическом равновесии с газом или жидкостью. Известен, например, замечательный опыт Каплера (1931 г.) по определению значения постоянной Больцмана k , основанный на приложении этого закона к термическим флуктуациям в воздушной среде зеркала гальванометра [1, с. 413]. Здесь примечательна «макроскопичность» степени свободы крутильных колебаний зеркальца на кварцевой нити, т.к. несмотря на миниатюрность устройства, оно состоит из огромного числа молекул. На законе равномерного распределения основан вывод закона Релея-Джинса в теории электромагнитного теплового излучения абсолютно черного тела, а также закона

Дюлонга и Пти о теплоемкости твердых тел. Несостоятельность этих классических законов в объяснении явлений при низких температурах и высоких частотах способствовала рождению квантовой механики.

Считать собственные колебания (стоячие волны) электромагнитного поля в зеркально отражающей полости степенями свободы поля предложил Релей (1900 г.) [2, с.83,164]. При этом он исходил из аналогии с колебаниями замкнутой воздушной массы, описанными в его «Теории звука». Позже (1912 г.) это представление применительно к звуковым волнам в твердом теле использовал Дебай в своей теории теплоемкости твердого тела.

Рассматриваемый здесь акустический вариант равномерного распределения имеет свои отличия, отмеченные ниже. Автору известны лишь две работы [3,4], где расчеты основаны на предположении о равномерном распределении энергии случайных вибраций.

1. Ударное возбуждение вибраций

Корпус реального судна с точки зрения распространения и распределения в нем вибраций представляет собой такую сложную и хаотичную систему, которую практически невозможно рассчитать путем решения дифференциальных уравнений, особенно при сложном силовом воздействии. Ситуация здесь вполне аналогична той, которая имеется, например, в газе, где невозможно проследить за движением отдельных молекул. Но та же аналогия подсказывает путь применения к расчету судовых вибраций методов статистической физики и дает надежду на плодотворность такого подхода.

При возбуждении вибраций молоточковым вибратором 1/3-октавный спектр вибрационных ускорений пластин корабельного корпуса имеет обычно следующие особенности:

- в среднем линейный подъем ~9 дБ/окт в диапазоне частот 0,5 ... ~5 кГц;
- максимум на частоте ~5 кГц;
- крутой спад в область высоких частот.
- Аналогичный по характеру спектр наблюдается и при возбуждении свободных пластин сериями одиночных ударов.

Наличие в спектре вибраций максимума и последующего высокочастотного спада легко объясняется конечностью времени контакта ударника с пластиной основания. Первая же из указанных особенностей спектра навела на мысль о том, что при широкополосном возбуждении вибрации в пластине должны подчиняться закону равномерного распределения колебательной энергии по степеням свободы, т. е. каждое нормальное колебание должно иметь одну и ту же среднюю во времени и по поверхности пластины кинетическую энергию $\langle T \rangle$, Дж. Тогда, умножив эту величину на известное для каждой пластины число нормальных изгибных волн, приходящихся на данную 1/3-октавную полосу частот (см. Приложение), получим полную кинетическую энергию изгибных колебаний пластины в этой полосе. Для прямоугольной пластины, опертой по краям, эту энергию можно вычислить непосредственно, выразив её через среднеквадратичную и усредненную по поверхности пластины скорость колебаний. Таким путем для среднеквадратичного и усредненного по поверхности пластины 1/3-октавного виброускорения $\langle \bar{a} \rangle$, м/с² получим формулу:

$$\langle \bar{a} \rangle = \frac{\omega^{3/2}}{h} \sqrt{\frac{\sqrt{12} \beta \langle T \rangle}{\pi r_1 c_1}}, \quad (1)$$

где ω – круговая частота, рад/с; $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega} = 0,232$ – относительная ширина полосы 1/3-октавного фильтра; h – толщина пластины, м; ρ_1 – плотность материала пластины, кг/м³; $c_1 = \sqrt{E/\rho_1(1-\sigma^2)}$ – скорость продольных волн в ней, м/с; E – модуль Юнга, Па; σ – коэффициент Пуассона. Черта сверху означает среднеквадратичное усреднение по времени, скобки – энергетическое усреднение по поверхности пластины.

Величина $\langle \bar{T} \rangle$, вообще говоря, зависит от частоты, поскольку связана со спектральной характеристикой воздействия. Последнее предполагается широкополосным настолько, чтобы $\langle \bar{T} \rangle$ мало изменялась в пределах 1/3-октавной полосы частот. При ударном возбуждении пластин $\langle \bar{T} \rangle = const$ в широком диапазоне частот, и формула (1) объясняет наблюдаемый подъем 9 дБ/окт в спектрах вибраций как корабельных, так и одиночных свободно подвешенных пластин. Существеннее, однако, что формула (1) хорошо описывает распределение уровней вибраций в компактных корабельных конструкциях из разных пластин, например, в пластинчатых фундаментах. При этом функция $\langle \bar{T}(\omega) \rangle$ одна и та же для всех пластин данной конструкции. Она является аналогом абсолютной температуры в статфизике и ее удобно назвать «вибратурой».

Поскольку все корабельные пластины обычно стальные, то виброускорения на них согласно (1) обратно пропорциональны толщинам пластин.

На рис. 1 представлены 1/3-октавные спектры вибрационных ускорений $\langle \bar{a} \rangle$ свободно подвешенной стальной пластины. Вибрации пластины возбуждались сериями последовательных ударов в случайных точках поверхности стальным шариком и эбонитовой ручкой.

На рис. 2 показаны спектры уровней $\langle \bar{a} \rangle$ на трех разных стальных пластинах фундамента, возбужденного молоточковым вибратором.

2. Возбуждение вибраций воздушным шумом

Вибрационное поле в корабельной конструкции удобно возбуждать широкополосным воздушным шумом в помещении. Такой способ возбуждения вибраций имеет ряд очевидных преимуществ перед другими и, в первую очередь, в части повышения точности и предсказуемости измерений. При использовании современных звукотехнических средств мощность шумового возбуждения может быть вполне сравнима с мощностью других применяемых источников вибраций.

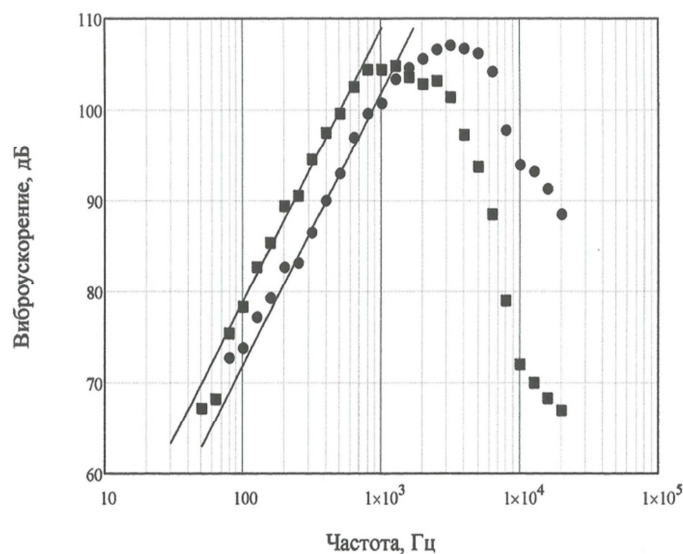


Рис. 1. Виброускорения $\langle \bar{a} \rangle$ стальной пластины размером $1321 \times 713 \times 1,8 \text{ мм}^3$ при ее ударном возбуждении: • – стальным шариком $\varnothing 11,1 \text{ мм}$; ■ – эбонитовой ручкой. Наклон прямых – 9 дБ/окт

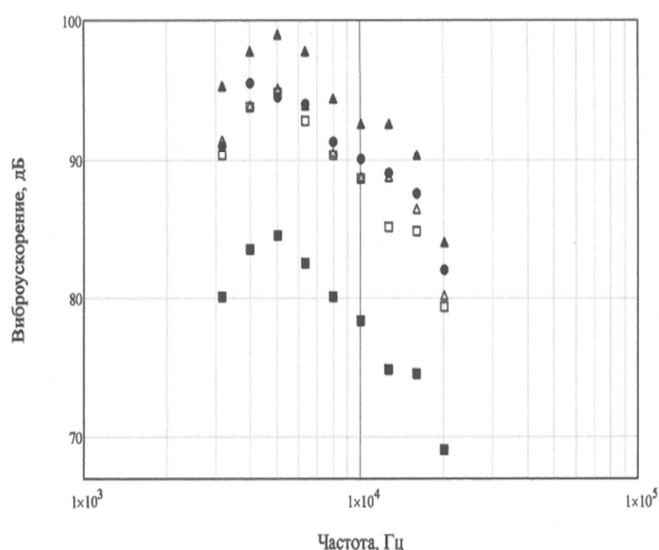


Рис. 2. Спектры вибраций пластин фундамента, возбужденного молоточковым вибратором: ▲ – $h = 3,9 \text{ мм}$; • – $h = 6,1 \text{ мм}$; ■ – $20,0 \text{ мм}$; Δ, □ – приведение к пластине $h = 6,1 \text{ мм}$

Считая справедливым равномерное распределение энергии хаотических звуковых колебаний в воздухе помещения по его степеням свободы, получим для среднеквадратичного (и усредненного по объему) звукового давления в 1/3-октавной полосе формулу:

$$\langle \bar{P} \rangle = \omega^{3/2} \sqrt{\frac{\beta \rho \langle \bar{T} \rangle}{\pi^2 c}}, \text{ Па}, \quad (2)$$

где ρ , кг/м^3 и c , м/с – плотность и скорость звука в воздухе, а функция $\langle \bar{T}(\omega) \rangle$, Дж предполагается той же самой, что и в формуле (1) для пластин, находящихся в помещении и возбуждаемых воздушным шумом.

Таким образом, как следует из формул (1) и (2), 1/3-октавные спектры $\langle \bar{a} \rangle$ и $\langle \bar{P} \rangle$ должны совпадать по форме, что, как показали многие измерения, и имеет место в действительности. При этом должно выполняться равенство

$$\langle \bar{a} \rangle = \sqrt{\frac{\sqrt{12}\pi c}{\rho \rho_1 c_1 h^2}} \langle \bar{P} \rangle, \quad (3)$$

дающее способ взаимной калибровки акселерометров (или приемников колебательной скорости) и микрофонов (гидрофонов). Способ проверен на практике и обладает высокой точностью калибровки ($\pm (0,1 \dots 0,2)$ дБ). Так, на свободно подвешенной в возбуждаемом шумом помещении стальной пластине толщиной $h = 4,0$ мм измеренное на частоте 3,15 кГц виброускорение составило $0,475 \text{ м/с}^2$, а вычисление по формуле (3) с использованием измеренного значения звукового давления дало $0,479 \text{ м/с}^2$.

Необходимо, однако, сделать существенное уточнение: в объединенной системе «воздушный объем + пластина» равномерное распределение кинетической энергии по степеням свободы и воздуха и пластины имеет место лишь на частотах, превышающих критическую частоту пластины [5, с.28]

$$f_{кр} = \frac{\sqrt{3}c^2}{\pi h c_1}, \quad (4)$$

т.е. в условиях, когда пластина способна обмениваться звуковой энергией с окружающей воздушной средой.¹

На рис. 3 представлены виброускорения вибраций пластинчатого фундамента, возбужденных широкополосным воздушным шумом в помещении.

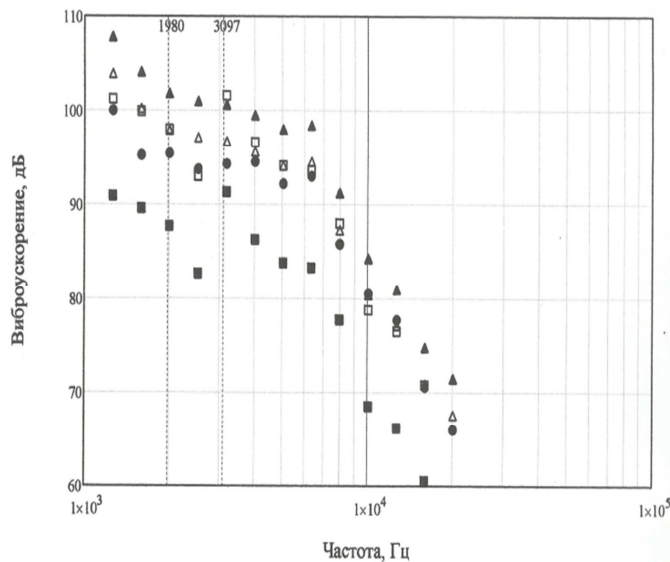


Рис. 3. Уровни виброускорений $\langle \bar{a} \rangle$ на стальных пластинах фундамента при его возбуждении воздушным шумом: \blacktriangle — $h = 3,9$ мм, $f_{кр} = 3,097$ кГц; \bullet — $h = 6,1$ мм, $f_{кр} = 1,98$ кГц; \blacksquare — $h = 20,0$ мм, $f_{кр} = 0,604$ кГц; Δ , \square — пересчет на $h = 6,1$ мм

На рис. 4 показаны измеренные акселерометром уровни виброускорений $\langle \bar{a} \rangle$

¹ Естественно предположить, что шум в помещении, создаваемый вибрациями пластин, тоже связан с ними законом равномерного распределения, хотя экспериментально это не проверялось.

на свободно подвешенных пластинах, приведенные к стальной пластине толщиной $h = 4,0$ мм. Возбуждение вибраций в пластинах осуществлялось широкополосным воздушным шумом в помещении. Кружочками для стальной пластины $h = 4,0$ мм отмечены предсказанные виброускорения, вычисленные по формуле (3) с использованием результатов измерений конденсаторным микрофоном уровней звукового давления в зашумленном помещении.

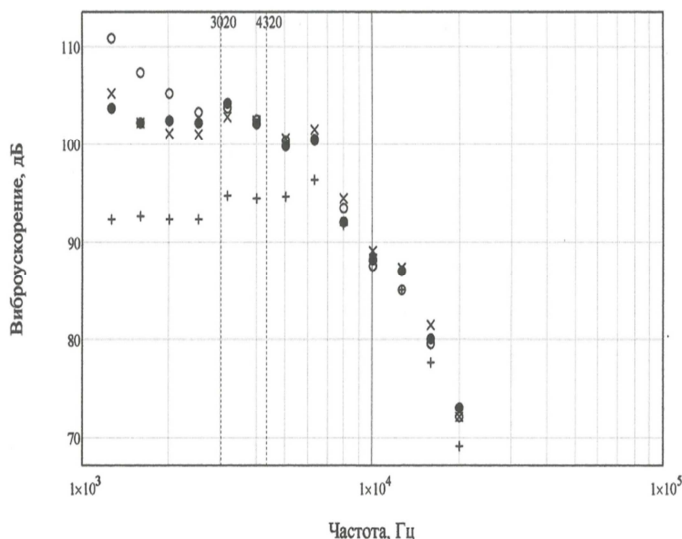


Рис. 4. Виброускорения $\langle \bar{a} \rangle$ на свободно подвешенных в шумном помещении пластинах, приведенные к стальной пластине $h = 4,0$ мм: • – стальная пластина $1675 \times 300 \times 4,0$ мм³, $f_{кр} = 3,02$ кГц; ◦ – уровни $\langle \bar{a} \rangle$ для стальной пластины $h = 4,0$ мм, рассчитанные по формуле (3); × – дюралевая пластина $764 \times 483 \times 2,85$ мм³, $f_{кр} = 4,32$ кГц; + – стальная пластина $1000 \times 500 \times 1,5$ мм³, $f_{кр} = 8,0$ кГц

Видно, что на частотах, превышающих критическую для этой пластины частоту $f_{кр} = 3,02$ кГц, совпадение измеренных и предсказанных значений виброускорений вполне хорошее. Такое совпадение наблюдалось неоднократно, что послужило обоснованием упомянутой выше взаимной калибровки датчиков.

На рисунке 4 также хорошо видно, что равномерное распределение для дюралевой пластины справедливо на частотах, превышающих критическую для нее частоту $f_{кр} = 4,32$ кГц, а для стальной пластины $h = 1,5$ мм – на частотах, больших $f_{кр} = 8,0$ кГц.

3. Простые примеры

В подтверждение эффекта равномерного распределения приведем несколько простых примеров.

3.1. Струна пианино

Длина струны l , м, линейная плотность μ , кг/м, сила натяжения T_0 , Н. Если в начальный момент времени $t = 0$ подвергнуть струну точечному удару в точке $x = c$, $0 < c < l$, сообщив ей импульс силы I , Н·с, то последующие смещения точек струны от положения равновесия примут вид [6, с. 169]:

$$y(x, t) = \frac{2I}{\pi v \mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{\pi m c}{l} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi m v t}{l}, \quad (5)$$

где $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, м/с – скорость распространения волн по струне; m – номер гармоники. Используя (5), найдем кинетическую энергию колебаний струны:

$$T(t) = \frac{\mu}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{I^2}{M} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi m c}{l} \cos^2 \frac{\pi m v t}{l},$$

где $M = \mu l$, кг – масса струны. Усредним $T(t)$ по большому времени $\tau \rightarrow \infty$:
 $\overline{T(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T(t) dt$. Получим:

$$\overline{T(t)} = \frac{I^2}{2M} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi m c}{l},$$

откуда видно, что средняя по времени кинетическая энергия m -ой гармоники

$$\overline{T_m(t)} = \frac{I^2}{2M} \sin^2 \frac{\pi m c}{l}. \quad (6)$$

Если удар пришелся по центру струны $c = l/2$, то согласно (6) возбуждятся только нечетные гармоники и каждая из них приобретет одну и ту же среднюю кинетическую энергию

$$\overline{T_m(t)} = \frac{I^2}{2M} = \text{invar}. \quad (7)$$

Если удар равновероятно приходится на любую случайную точку струны, то из (6) следует:

$$\langle \overline{T_m(t)} \rangle = \frac{I^2}{4M} = \text{invar}. \quad (8)$$

3.2. Стержень с одним жестко закрепленным ($x = 0$) и другим свободным ($x = l$) концом

Продольный удар в начальный момент времени $t = 0$ в торец свободного конца стержня сообщает ему импульс силы I , Н·с. Используя решения задач в книге [7, с.237,248], найдем продольные смещения в стержне после удара

$$y(x,t) = \frac{8Il}{\pi^2 ES} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m^2} p_m \cdot \sin a_m l \cdot \sin a_m x \cdot \sin p_m t, \quad (9)$$

где E , Па – модуль Юнга материала стержня; S , м² – площадь его поперечного сечения;

$$a_m = \frac{\pi m}{2l}; \quad p_m = \frac{\pi m}{2l} \sqrt{\frac{ES}{\mu}}; \quad (10)$$

μ , кг/м – погонная масса стержня. Возбуждаются только нечетные гармоники, которые на свободном конце имеют пучности колебаний.

С помощью формул (9) и (10) найдем кинетическую энергию колеблющегося стержня:

$$T(t) = \frac{\mu}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{I^2}{M} \sum_{m=1,3,5,\dots} \cos^2 p_m t,$$

где $M = \mu l$, кг – масса стержня. Отсюда:

$$T_m(t) = \frac{I^2}{M} \cos^2 p_m t$$

и

$$\overline{T_m(t)} = \frac{I^2}{2M} = \text{invar}, \quad (11)$$

т.е. снова на каждую возбужденную ударом гармонику приходится одна и та же средняя по времени кинетическая энергия $I^2/2M$.

3.3. Консоль – стержень, заделанный на одном конце

Поперечный удар по свободному концу сообщает стержню импульс силы I , H и возбуждает поперечные колебания в стержне [8, с. 179–185]:

$$y(x, t) = \frac{I}{\rho l S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(l) \Psi_n(x)}{v_n} \sin(2\pi v_n t), \quad (12)$$

где ρ – плотность стержня; l – его длина; S – площадь поперечного сечения; $\Psi_n(x)$ – фундаментальные функции [8, (15.8)], соответствующие допустимым частотам v_n [8, (15.7)]:

$$v_1 = \frac{0.55966}{l^2} \sqrt{\frac{E k^2}{\rho}}, \quad v_2 = 6,267 v_1, \quad v_3 = 17,548 v_1, \quad v_4 = 34,387 v_1, \dots; \quad (13)$$

E , Pa – модуль Юнга; k , m – радиус инерции поперечного сечения [8, с. 175]. Поскольку согласно (13) обертоны колеблющейся консоли весьма далеки от гармоник, то движение (12) явно не периодическое.

Из (12) следует:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{2I}{\rho l S} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(l) \Psi_n(x) \cos(2\pi v_n t).$$

Кинетическая энергия колебаний консоли

$$T(t) = \frac{\rho S}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{2I^2}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(2\pi v_n t), \quad (14)$$

где $M = \rho l S$, kg – масса стержня.

При выводе (14) учтена ортогональность функций $\Psi_n(x)$ и соотношение $\Psi_n^2(l) = 2$ [8, (15.9)].

Кинетическая энергия n -го собственного колебания консоли согласно (14) равна:

$$T_n(t) = \frac{2I^2}{M} \cos^2(2\pi v_n t).$$

Среднее по времени значение этой энергии составляет

$$\overline{T_n(t)} = \frac{I^2}{M} = \text{invar}. \quad (15)$$

Оно одно и то же для всех собственных колебаний.

Таким образом, удар по концу консоли возбуждает в ней изгибные колебания на всех допустимых (не кратных!) частотах v_n с одинаковой на каждой частоте средней по времени кинетической энергией, т.е. имеет место равномерное распределение энергии по степеням свободы консоли.

Кстати сказать, ни одному из рассмотренных примеров «ультразвуковая катастрофа» не грозит, т.к. реальный удар не может быть точечным ни в пространстве, ни во времени. Поэтому высокие гармоники и обертоны, частоты которых заметно превышают значение $1/\tau$, где τ – длительность удара, просто не будут возбуждены

таким ударом. В этом принципиальное ограничение эффекта равномерного распределения: он относится только к основному набору возбужденных собственных колебаний тела.

Было выполнено также теоретическое рассмотрение вынужденных вибраций более сложного объекта – тонкой ограниченной цилиндрической оболочки. Теория колебаний оболочки в качестве частных случаев включает в себя теории продольных, крутильных и изгибных колебаний пластин и стержней – основных составных элементов корпусных конструкций. Из-за конечных размеров оболочки в ней возбуждаются стоячие волны собственных квазипродольных, квазисдвиговых (крутильных) и квазиизгибных колебаний. При этом для случайных вибраций, возбужденных множественными ударами, подтверждена справедливость равномерного распределения кинетической энергии по степеням свободы – любым собственным колебаниям оболочки.

Заключение

В статье представлены некоторые теоретические и экспериментальные подтверждения акустического варианта равномерного распределения. Он сулит многие применения. Так, на его основе могут быть созданы теория действия одиночных звукопоглотителей в зашумленных помещениях, а также теория одиночных вибропоглотителей (как резонансных, так и широкополосных) для подавления структурного звука. Возможность высокоточной взаимной калибровки акустических датчиков проверена на практике. Формула (3) означает, что можно, например, оценить спектр виброускорений пластины не акселерометром, а микрофоном, измерив им спектр звуковых давлений шума. Можно поступить и наоборот. По разности 1/3-октавных уровней виброускорений на двух разных пластинах можно также, используя формулу (1), определить отношение толщин этих пластин. Таким способом по восьми наиболее совпадающим при приведении данным рис. 3 для стальных пластин $h = 3,9$ мм и $h = 20,0$ мм для последней пластины получен весьма близкий результат: $h = 20,075$ мм.

Классический закон равномерного распределения, примененный к макроскопическому телу, относится исключительно к случаям, когда тело находится в состоянии термодинамического равновесия с газом или жидкостью. Так, в теории Дебая о теплоемкости твердого тела (наиболее близкий аналог к нашему случаю) звуковые волны в теле возбуждаются ударами молекул газа (или обусловленными этими ударами флуктуациями давления) и таких ударов невообразимо много. В акустическом же случае равномерное распределение наступает, например, всего при десятке ударов шариком по пластине в случайных местах или даже при одном ударе как в «**Простых примерах**». Степенями свободы в акустике служат собственные колебания тел, т. е. стоячие звуковые волны. Каждая такая степень свободы ассоциируется с акустическим резонатором. В отсутствие потерь собственные колебания взаимно ортогональны, а представляющие их резонаторы независимы.

Акустический вариант явления акустикам, видимо, совсем не известен. Ни в одной из множества главных книг по акустике об этом не удалось найти сведений. Нет упоминания о нем и в Справочнике [5]. Поиски в Интернете тоже не дали результатов.

Представляется полезным и интересным дальнейшее детальное изучение равномерного распределения акустической энергии, выявление пределов и областей его применения, особенно с учетом вибрационных и звуковых потерь, чего здесь мы не касались.

Приложение

Число собственных изгибных колебаний пластины в полосе частот Δf , Гц [5, с.22]

$$\Delta N = \frac{2\sqrt{3}S}{hc_1} \Delta f, \quad (\text{П1})$$

где $S, \text{ м}^2$ – площадь пластины. Это верно, если

$$\frac{2\pi f}{c_{изг}} \gg \frac{L}{2S},$$

где

$$c_{изг} = \sqrt{\frac{\omega h c_1}{\sqrt{12}}}, \text{ м/с} - \quad (\text{П2})$$

скорость распространения изгибных волн в пластине; $L, \text{ м}$ – периметр пластины. Из двух последних выражений следует условие:

$$f \gg f_0 = \frac{c_1 h L^2}{16\sqrt{3}\pi S^2}, \text{ Гц.} \quad (\text{П3})$$

Теория тонких пластин справедлива, если $h \ll c_{изг} / f$, м/с откуда следует необходимость:

$$f \ll f_1 = \frac{\pi c_1}{\sqrt{3}h}. \quad (\text{П4})$$

Практически условия (П3), (П4) всегда выполняются.

Число собственных звуковых колебаний воздушного помещения объемом V в полосе частот Δf [8, с. 430]

$$\Delta N = \frac{4\pi f^2 V}{c^3} \Delta f. \quad (\text{П5})$$

Это справедливо для частот $f \gg \frac{cA}{8V}$, где $A, \text{ м}^2$ – площадь всех стен помещения.

Список литературы

1. Беккер Р. Теория теплоты. / Пер. с нем. М.: Энергия, – 1974. – 504 с.
2. Шёпф Х.-Г. От Кирхгофа до Планка. / Пер. с нем. Под ред. Д.Н. Зубарева. М.: Мир, – 1981. – 192 с.
3. Степанов В.Б., Тартаковский Б.Д. О статистическом методе расчета вибрации сложной конструкции // Акуст. журн. – 1987. – Т. 33. – № 4. – С. 743–750.
4. Степанов В.Б., Тартаковский Б.Д. О статистическом методе оптимизации размещения вибропоглощающего покрытия на сложной конструкции // Акуст. журн. – 1989. – Т. 35. – № 1. – С. 116–121.
5. Справочник по судовой акустике. / Под ред. И.И. Клюкина, И.И. Боголепова. Л.: Судостроение, – 1978. – 422 с.
6. Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. 4-е изд. исправл. и дополн. М.-Л.: ОНТИ, – 1936. – 505 с.
7. Бабаков И.М. Теория колебаний. 2-е изд. перераб. М.: Наука, – 1965. – 560 с.
8. Морз Ф. Колебания и звук. / Пер. с англ. Под ред. С.Н. Ржевкина. М.-Л.: ГИТТЛ, – 1949. – 496 с.