УДК 534.8

OECD 01.03.AA

Исследование разрешения при различных схемах измерений в акустической томографии

Осетров А.В.
Д.т.н., профессор, Санкт-Петербургский Государственный электротехнический университет (СПбГЭТУ),
197386, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5

Аннотация

На основании поведения функции рассеяния точки (ФРТ) изучаются закономерности изменения разрешения в акустической томографии при различных условиях измерений. Предлагаемый подход заключается в исследовании области пространственного спектра, позволяющий исключить затухающие составляющие акустического поля. Для различных схем измерений показано, как сопоставить каждую точку в области пространственных частот функции неоднородностей с распространяющейся или затухающей составляющей акустического поля. В результате удается построить замкнутые области данных, размеры и конфигурация которых как раз и несут информацию о характере ФРТ и разрешении реконструированного изображения. Поведение ФРТ исследуется вне зависимости от конкретного алгоритма томографии, условий пространственной и временной дискретизации и другой дополнительной частной информации, а принимая в расчет лишь тот факт, что по результатам измерений удается заполнить определенную часть области пространственных частот.

Ключевые слова: Акустическая томография, разрешение изображений, реконструкция акустических изображений.

Resolution investigation for the different measurement schemes in acoustical tomography

Osetrov A.V.
Dr.Sc., Prof, St.Petersburg State Electrotechnical Univ.,
197386 St.Petersburg, Prof.Popov Str., 5.

Abstract

Based on point spread function (PSF) for the different measurements schemes in acoustical tomography the image resolution have been investigated. Proposed approach consists of space spectrum domain investigation where decaying waves were excluded. It is shown how to match the point in space spectrum domain with propagating or decaying components of acoustical field. The closed areas in the space frequency domain have been constructed; the sizes and shapes of these areas define the behavior of PSF and resolution value. PSF have been investigated independent of tomography algorithm, parameters of space and time sampling, and other additional minor information; only the fact was taken into account that after the measurements the certain area in the space frequency domain will be filled.

Key words: *Acoustical tomography, Image resolution, Acoustical image reconstruction.*

Введение

Величина разрешения, т.е. наименьшее расстояние между двумя точками объекта, видимыми раздельно на изображении, является одним из определяющих параметров алгоритмов реконструкции изображений. Для акустических изображений этот параметр является критическим ввиду сопоставимости требуемого для

E-mail: avosetrov@list.ru

практических приложений разрешения и длины акустической волны. Многие системы акустической томографии работают на близком к теоретическому пределу разрешения.

Из-за повышенных требований к разрешению получили развитие дифракционные алгоритмы реконструктивной акустической томографии [1, 2], учитывающие дифракционные эффекты в процессе распространения акустических волн в среде и рассеяния от неоднородностей акустического поля. Представляет интерес исследование потенциально достижимого разрешения этих алгоритмов, не учитывающего параметры измерений, которые относительно легко могут быть улучшены (например, величины пространственной и/ или временной дискретизации). В статье рассматривается подход к решению, основанный на выделении области пространственных частот ФРТ, которая заполняется данными в результате измерений. С точки зрения физической интерпретации это означает учет только распространяющихся составляющих акустических волн и исключение из рассмотрения всех видов затухающих волн, т.е. не принимается во внимание возможность достичь сверхразрения [3].

1. Общий подход к исследованию разрешения

Для определения выражений для ФРТ введем локальную неоднородность, расположенную в начале координат, по следующей формуле (ограничиваемся двухмерным случаем):

$$O(x,y)=\delta(x)\delta(y)\,, \tag{1}$$

где $\delta()$ — δ –функция Дирака.

Зная вид неоднородности (1) и используя двухмерное преобразование Фурье, легко вычислить спектр пространственных частот такой неоднородности. В силу фильтрующего свойства $\delta-$ функции, очевидно, что $\tilde{O}(k_x,k_y)\equiv 1$, т.е. пространственный спектр занимает неограниченную по протяженности зону в области пространственных частот. Однако по результатам измерений не удается заполнить данными всю область пространственных частот, поэтому будем записывать оценку пространственного спектра в виде: $\hat{\tilde{O}}(k_x,k_y)=\begin{cases}\tilde{O}(k_x,k_y),\,(k_x,k_y)\in\Omega;\\ 0,\,(k_x,k_y)\notin\Omega;\end{cases}$, где Ω — область, в которой известен спектр пространственных частот (она определяется схемой и параметрами измерений и условно показана на рис. 1), «домик» означает оценку функции.

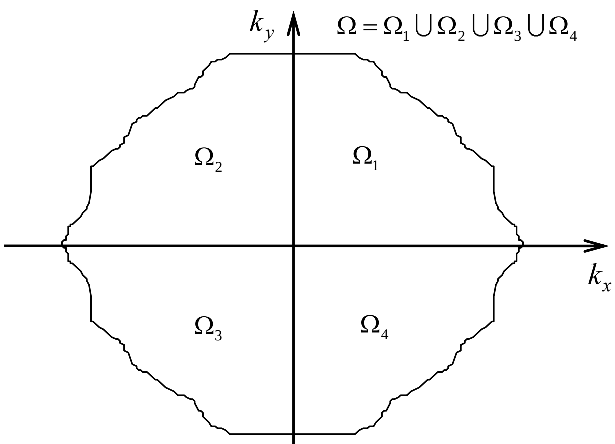


Рис. 1. Область пространственного спектра функции неоднородностей, заполненная данными измерений

Вычислением обратного двухмерного преобразования Фурье от последнего выражения находится оценка изображения для неоднородности (1), т.е. определяется функция рассеяния точки. Итак,

$$PSF(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\Omega}\exp\left[\,j\left(k_x x+k_y y\right)\right]dk_x dk_y\ , \qquad (2)$$

где $PSF(x,y)$ — функция рассеяния точки.

Далее примем, что область Ω обладает двумя следующими свойствами:

1. В силу особенностей измерений, подобласти Ω_1 и Ω_2 (рис. 1) симметричны относительно оси k_y. Как правило, для этого достаточно, чтобы направленность датчика(ов) была симметричной относительно плоскости, нормальной к линии измерений (сканирования).

2. В силу ограничений, накладываемых на функцию неоднородностей, подобласти $\Omega_1\cup\Omega_2$ и $\Omega_3\cup\Omega_4$ симметричны относительно оси k_x. Так, если функция неоднородностей отлична от нуля лишь в полупространстве $y>0$, то восстановление изображения осуществляется для пространственного спектра, обладающего свойством $\tilde{O}(k_x,k_y)=\tilde{O}(k_x,-k_y)$. В других случаях можно считать, что функция неоднородностей является вещественной, следовательно, $\tilde{O}(k_x,k_y)=\tilde{O}^*(-k_x,-k_y)$, звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения, и тогда обеспечивается симметрия внутри следующих двух пар подобластей: Ω_1, Ω_3 и Ω_2, Ω_4, что при совместном выполнении первого свойства также приводит к симметрии Ω относительно оси k_x.

В результате, достаточно анализировать подобласть Ω_1, а выражение (2) после очевидных преобразований приводится к виду

$$PSF(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Omega_1}\cos(k_x x)\cos(k_y y)dk_x dk_y\ . \qquad (3)$$

При исследовании разрешения будем вводить понятия реальных и идеальных измерений, понимая под идеальными такие условия измерений, при которых размер области Ω_1 оказывается максимальным для данной схемы измерений (что, обычно, происходит лишь при использовании точечных преобразователей и бесконечных апертур). При идеальных измерениях, во-первых, имеется минимальное количество параметров и, во-вторых, обычно, проще вычислить величины разрешений. Поэтому представляет интерес выделять влияние на характеристики реконструкции конкретного параметра (например, диапазона углов сканирования, размера датчика и т.п.), присущего реальным измерениям. Для сопоставления характеристик реальных и идеальных измерений введем так называемые приведенные координаты $(\hat{x},\hat{y})$, вычисляемые по формулам

$$\hat{x}=x/\sigma_x\ , \qquad \hat{y}=y/\sigma_y\ , \qquad (4)$$

где

$$\sigma_x=\Delta k_x^{\max}/\Delta k_x\ , \qquad \sigma_y=\Delta k_y^{\max}/\Delta k_y\ , \qquad (5)$$

$\Delta k_{x,y}$ — максимальные размеры области Ω_1 вдоль осей координат (рис. 2), $\Delta k_{x,y}^{\max}$ — величины $\Delta k_{x,y}$ для идеальных измерений.

Исследование характеристик методов акустической томографии предлагается проводить в два этапа.

На первом этапе предлагается учитывать только эффекты, связанные с изменением размеров $\Delta k_{x,y}$ области Ω_1 при переходе от идеальных к реальным измерениям, т.е. пренебречь изменением формы области Ω_1. При справедливости такого приближения разрешение в приведенных координатах можно считать не зависящим от параметров измерений. Тогда, если считать, что $\Delta x^{\min}$ и $\Delta y^{\min}$ — продольное и поперечное разрешение для идеальных измерений, то из (5) следует, что

$$\Delta x / \Delta x^{\min} = \sigma_x, \qquad \Delta y / \Delta y^{\min} = \sigma_y, \tag{6}$$

где Δx и Δy — поперечное и продольное разрешения для реальных измерений.

Следовательно, величины σ_x и σ_y в выражениях (5) определяют, в первом приближении, степень ухудшения разрешения.

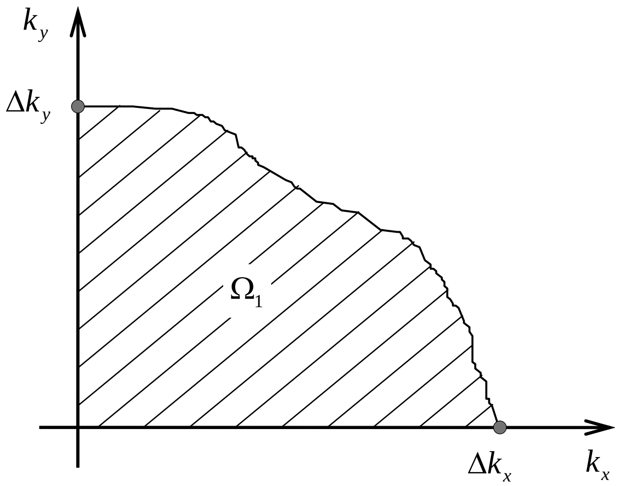


Рис. 2. Геометрические параметры заполненной данными области пространственного спектра функции неоднородностей

На втором этапе эффекты изменения формы области Ω_1 можно исследовать путем моделирования ФРТ, то эта часть выходит за пределы данной публикации.

2. Исследование разрешения для радиально симметричной области данных на плоскости пространственных частот

Рассмотрим радиально симметричную область Ω, заштрихованную на рис. 3 и характеризуемую внутренним и внешним радиусами k_1 и k_2. Введем полярную систему координат (ρ, φ) для пространственной области и (k_ρ, k_φ) для области пространственных частот. С учетом условия радиальной симметрии выражение (2) примет вид $PSF(\rho) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\Omega} \exp\left(j\rho k_\rho \cos k_\varphi \right) k_\rho dk_\rho dk_\varphi$. Интеграл по переменной k_φ удается взять с использованием следующего табличного определенного интеграла: $\int\limits_0^\pi \cos\left(j\rho k_\rho \cos k_\varphi \right) dk_\varphi = \pi J_0\left(\rho k_\rho \right)$, где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. После преобразований получаем $PSF(\rho) = \int_{k_1}^{k_2} k_\rho \, \mathrm{J}_0\left(\rho k_\rho\right) dk_\rho$. Если принять во внимание, что $\int x \, \mathrm{J}_0(x) = x \, \mathrm{J}_1(x)$, где J_1 — функция Бесселя первого порядка, то

$$PSF(\rho) = \frac{k_2 \, \mathrm{J}_1(\rho k_2) - k_1 \, \mathrm{J}_1(\rho k_1)}{2\pi\rho}. \tag{7}$$

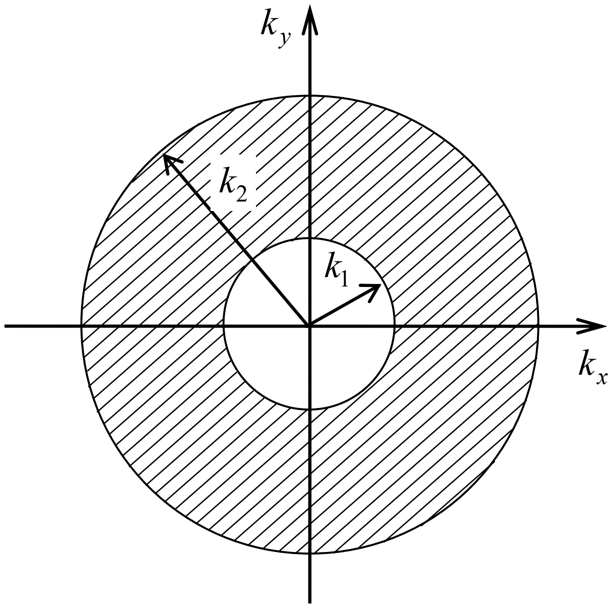


Рис. 3. Радиально симметричная область на плоскости пространственных частот, заполняемая данными измерений

Рассмотрим ряд частных случаев, соответствующих описанным в [1] схемам измерений (таблица 1) и приводящим к формированию области, показанной на рис. 3.

Для классической схемы сбор данных осуществляется при озвучивании объекта плоской волной с приемом данных на линии, перпендикулярной направлению распространения волны, с противоположной стороны объекта и последующим поворотом объекта (или измерительной системы) вокруг центра объекта. В области пространственных частот формируется круг при условии идеальных измерений (в случае полного оборота измерительной системы и бесконечной апертуры, на которой расположены измерительные ненаправленные датчики).

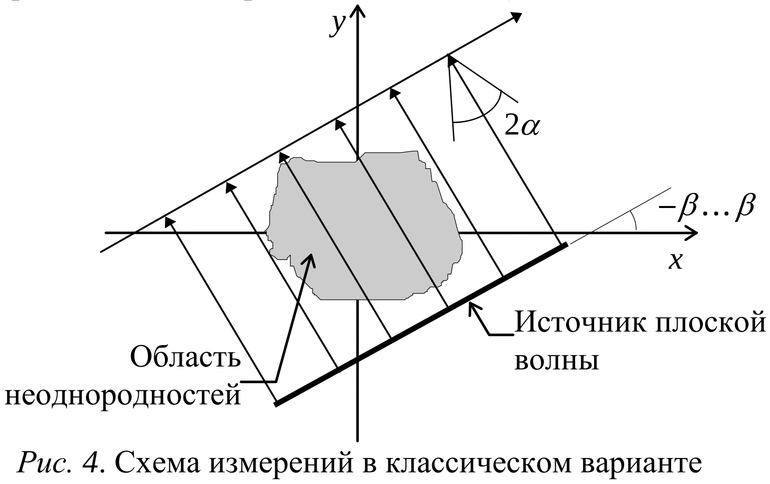


Рис. 4. Схема измерений в классическом варианте

В многочастотной схеме измерений используется сканирование по прямой одиночного приемо-излучателем с облучением объекта в некотором диапазоне частот (или коротким импульсом). Идеальность схемы измерений получается при сканировании вдоль бесконечной прямой и равномерной диаграммы направленности датчика во всем диапазоне углов.

Таблица 1
Функции рассеяния точки при радиально–симметричной области Ω

Схема измерений	Функция рассеяния точки	Разрешение
Классическая ($k_1 = 0$, $k_2 = k\sqrt{2}$).	$PSF(\rho) = \dfrac{k^2}{2\pi} \dfrac{2\,\mathrm{J}_1\left(k\rho\sqrt{2}\right)}{k\rho\sqrt{2}}$	$\Delta\rho \approx 0.43\lambda$, где $\lambda = 2\pi/k$
Многочастотная ($k_1 = 2k_н$, $k_2 = 2k_в$)	$PSF(\rho) = \dfrac{1}{\pi} k_в^2 \left(1 - \dfrac{1}{\varsigma^2}\right) PSF_n(\rho)$, где $PSF_n(\rho) = \dfrac{\varsigma\,\mathrm{J}_1\left(2k_в\rho\right) - \mathrm{J}_1\left(\dfrac{2k_в\rho}{\varsigma}\right)}{k_в\rho\left(\varsigma - \dfrac{1}{\varsigma}\right)}$, $\varsigma = k_в/k_н$.	При $\varsigma \to \infty$: $\Delta\rho \approx 0.3\lambda_в$, где $\lambda_в = 2\pi/k_в$

Величины разрешения $\Delta\rho$, сведенные в табл. 1, вычисляются как расстояние между максимумом и первым нулем функции рассеяния точки (заметим, что в силу радиальной симметрии $\Delta x^{\min} = \Delta y^{\min} = \Delta\rho$).

Для многочастотной схемы измерений функция $PSF_n(\rho)$ определяется двумя безразмерными параметрами: волновым размером $k_в\rho$ и относительной шириной спектра излучаемого сигнала ς, соответствующие зависимости представлены на рис. 5. Случай стремления параметра ς к бесконечности соответствует зоне в области пространственных частот функции неоднородностей без «дырки» посредине ($k_н = 0$). Если сохранять постоянной величину $k_в$, а увеличивать радиус «дырки», то, как видно из рис. 5, наблюдаются два эффекта: разрешение формально уменьшается, а у функции рассеяния точки увеличивается уровень дополнительных максимумов. Наиболее парадоксален эффект улучшения разрешения: казалось бы, уменьшается массив измеряемых данных (т.е. площадь заполняемой области пространственных частот, заштрихованная на рис. 3), следовательно, все характеристики системы должны были бы ухудшаться, а по отношению к разрешению происходит обратный эффект. На самом деле, подъем максимумов на практике оказывается более существенной негативной характеристикой системы томографии, чем улучшение разрешения, так как происходит как бы дублирование изображения (говорят о появлении сателлитов), своеобразное пространственное эхо. Такой эффект широко известен и связан с исключением из рассмотрения низких пространственных частот, расположенных вблизи начала координат в области пространственных частот функции неоднородностей.

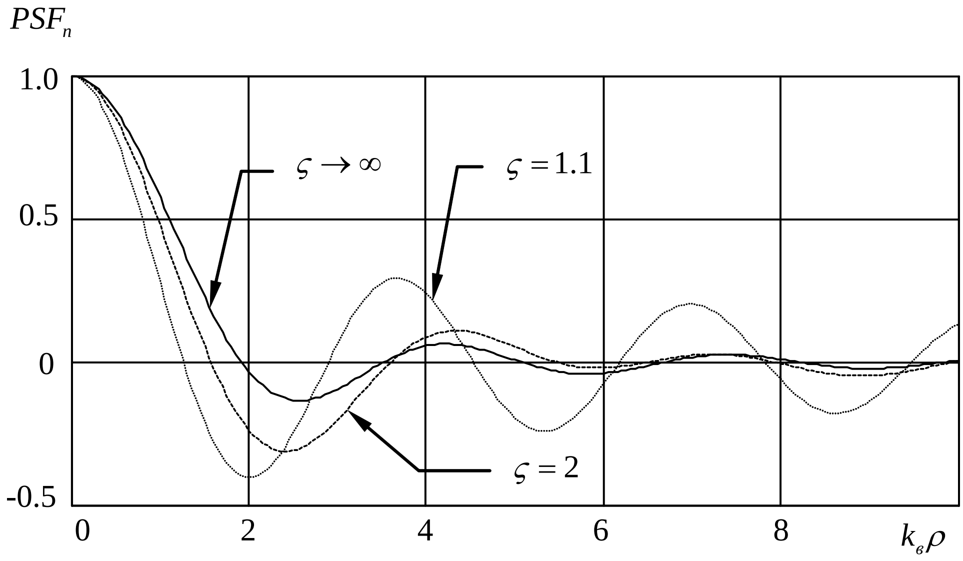


Рис. 5. Нормированные функции рассеяния точки для идеальных измерений при многочастотной схеме измерений

3. Исследование разрешения при использовании многоэлементной антенной решетки

При такой схеме измерений приемоизлучающие датчики располагаются на прямой линии над объектом, каждый из датчиков последовательно излучает сигнал, а прием отраженного поля осуществляется всеми датчиками, включая тот, который излучал. При идеальных измерениях считается бесконечной протяженность области датчиков, а сами датчики предполагаются ненаправленными. На плоскости пространственных частот формируется область, состоящая из двух кругов радиуса k, касающихся начала координат [1] и соответствующей ей подобласти Ω_1, показанная на рис. 6.

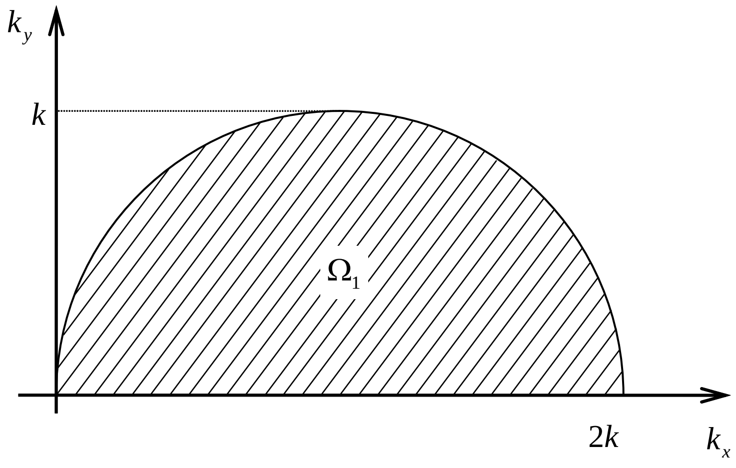


Рис. 6. Подобласть Ω_1 для идеальных измерений при использовании многоэлементного преобразователя

Используя выражение (3) и вычисляя внутренний интеграл по переменной k_y, приходим к выражению $PSF(x,y) = \dfrac{1}{\pi^2 y}\int\limits_0^{2k} \cos(k_x x)\sin\left[\sqrt{k^2-(k_x-k)^2}\,y\right]dk_x$. Выполнив замену переменных $\hat{k}_x = k_x - k$ и выделив симметричные и антисимметричные составляющие, получаем $PSF(x,y) = \frac{2}{\pi^2 y}\int_0^k \cos\left(\hat{k}_x x\right)\sin\left[\sqrt{k^2 - \hat{k}_x^{\,2}}\,y\right]d\hat{k}_x$. Если воспользоваться табличным интегралом $\int_0^a \sin\left(c\sqrt{a^2-x^2}\right)\cos bx dx = \frac{\pi}{2}\frac{ac}{\sqrt{b^2+c^2}}\mathrm{J}_1\left(a\sqrt{b^2+c^2}\right)$, то окончательно будем иметь

$$PSF(x,y) = \frac{k}{\pi}\cos kx \frac{2\mathrm{J}_1\left(k\sqrt{x^2+y^2}\right)}{k\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{8}$$

В отличие от выражения (7), в выражении (8) отсутствует симметрия по координатам, что непосредственно связано с видом области, показанной на рис. 6. Так как область является более вытянутой по направлению k_x, то следует ожидать меньшего значения разрешения в этом направлении. Выражения для характеристик в продольном и поперечном направлениях сведены в таблицу 2, а сечения нормированных ФРТ построены на рис. 7.

Таблица 2.
Характеристики идеальных измерений при использовании многоэлементного преобразователя

Направление	Сечение ФРТ	Разрешение
Продольное	$PSF(0,y) = \frac{k^2}{\pi}\frac{2\mathrm{J}_1(ky)}{ky}$	$\Delta y^{\min} \approx 0.6\lambda$
Поперечное	$PSF(x,0) = \frac{k^2}{\pi}\cos kx \frac{2\mathrm{J}_1(kx)}{kx}$	$\Delta x^{\min} = 0.25\lambda$

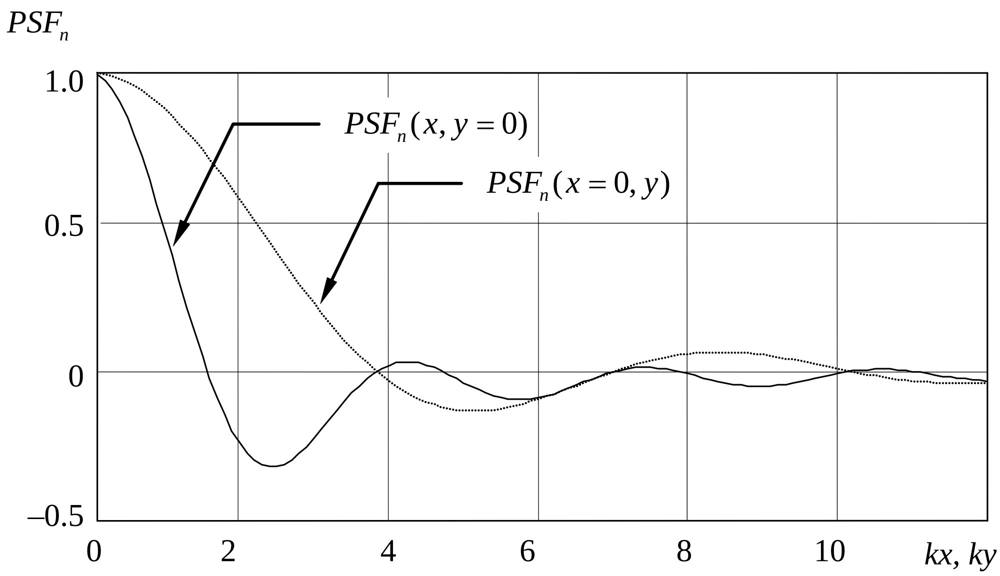


Рис. 7. Нормированные функции рассеяния точки для идеальных измерений при использовании многоэлементного преобразователя

4. Исследование разрешения в классической схеме измерений при реальных измерениях

Рассмотрение реальных параметров измерения проведем на примере схемы измерений, показанной на рис. 3. Будем вводить два параметра, характеризующих реальные измерения: диапазон углов поворота измерительной системы относительно объекта $[-\beta,\beta]$ и ограниченную направленность приемных датчиков, равную 2α, что может рассматриваться и как конечность приемной апертуры.

Если воспользоваться материалами, изложенными [1], то можно получить образ одной проекции в области пространственных частот функции неоднородностей — это дуга, занимающую часть полуокружности, с длиной, определяемой параметром α (рис. 8).

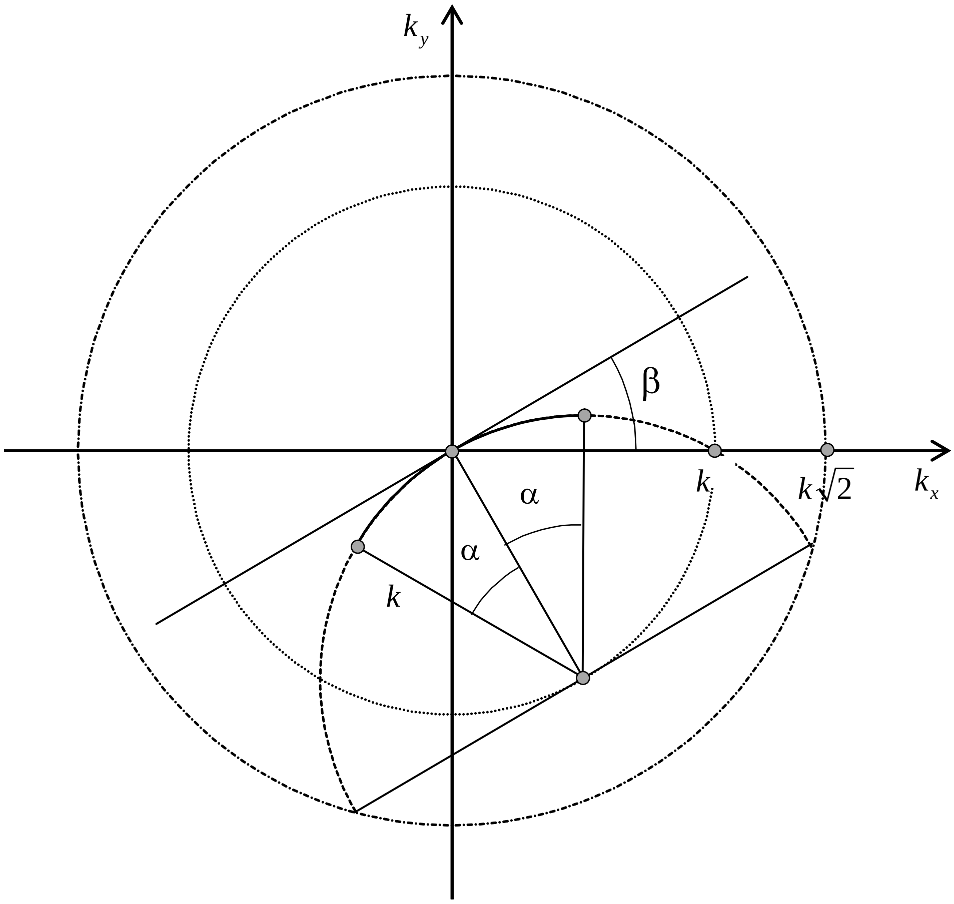
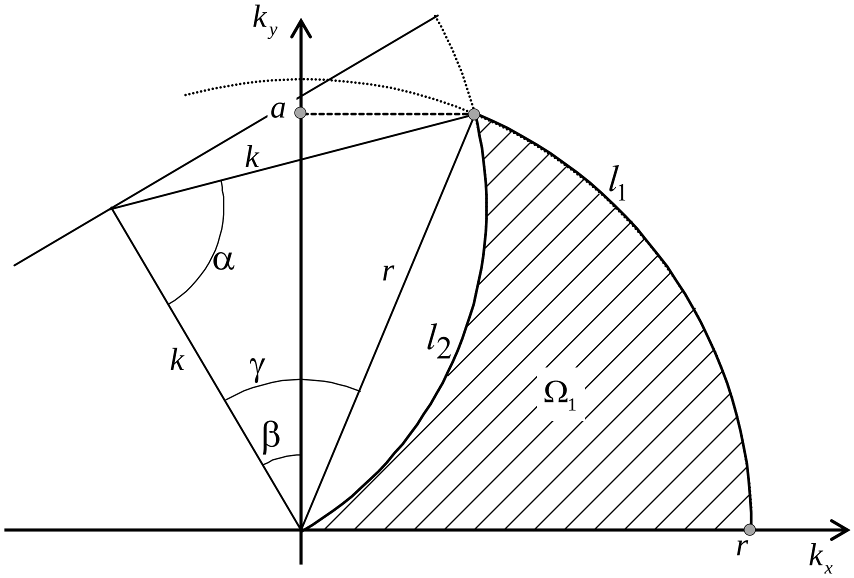
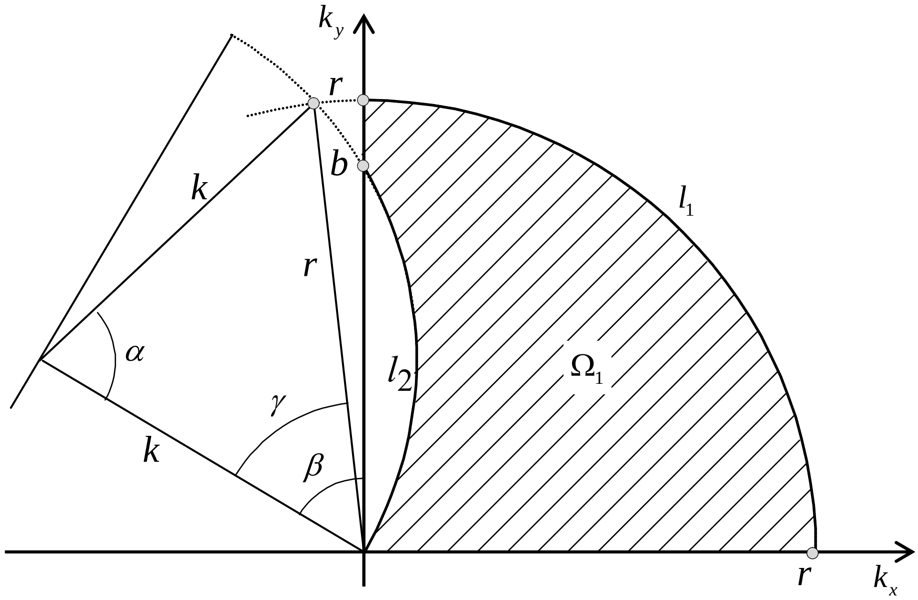


Рис. 8. Порядок заполнения области пространственных частот при реальных измерениях для классической схемы измерений

Совокупность дуг в диапазоне $[-\beta,\beta]$ углов сканирования образует достаточно экзотическую область, форма которой зависит от соотношения между двумя введенными параметрами α и β. Если $\alpha+2\beta<\pi$, ось k_y пересекает область Ω только в начале координат и в окрестности малых значений k_x образуется открытая зона, в которой отсутствуют данные измерений. Для получения области, симметричной относительно оси k_x, воспользуемся информацией о вещественности функции неоднородностей (как предлагалось ранее), тогда придем к областям данных Ω_1, изображенным на рис. 9а,б. Очевидно, что случай идеальных измерений реализуется при $\alpha=\beta=\pi/2$, на плоскости пространственных частот при этом образуется круг радиуса $k\sqrt{2}$ (его граница показана на рис. 8 пунктирной линией), следовательно $\Delta k_{x,y}^{\max} = k\sqrt{2}$.



а)



б)

Рис. 9. Геометрические параметры подобласти Ω_1 для классической схемы измерений при $\alpha \le \pi - 2\beta$ (а) и $\alpha \ge \pi - 2\beta$ (б)

Уравнения для граничных кривых l_1 и l_2 имеют вид $k_x^2 + k_y^2 = 4k^2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$ и $\left(k_x + k\sin\beta\right)^2 + \left(k_y - k\cos\beta\right)^2 = k^2$ соответственно, высота заштрихованной области равна $a = 2k\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\beta + \dfrac{\alpha}{2}\right)$ (рис. 9а) и $r = 2k\sin\dfrac{\alpha}{2}$ (рис. 9б), величина $b = 2k\cos\beta$. После подстановки последних выражений в (3) получаем

$$\sigma_x(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin{\alpha/2}}, \tag{9}$$

$$\sigma_y(\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin{\alpha/2}} \times \begin{cases} \left[\sin\left(\alpha + 2\beta/2\right)\right]^{-1}, & 2\alpha+\beta<\pi; \\ 1, & 2\alpha+\beta\geq\pi. \end{cases} \tag{10}$$

В соответствии с ранее предложенной физической трактовкой характеристик σ_x и σ_y, выражения (9) и (10) в первом приближении описывают ухудшение поперечного и продольного разрешений относительно имеющихся при идеальных измерениях (см. табл. 1).

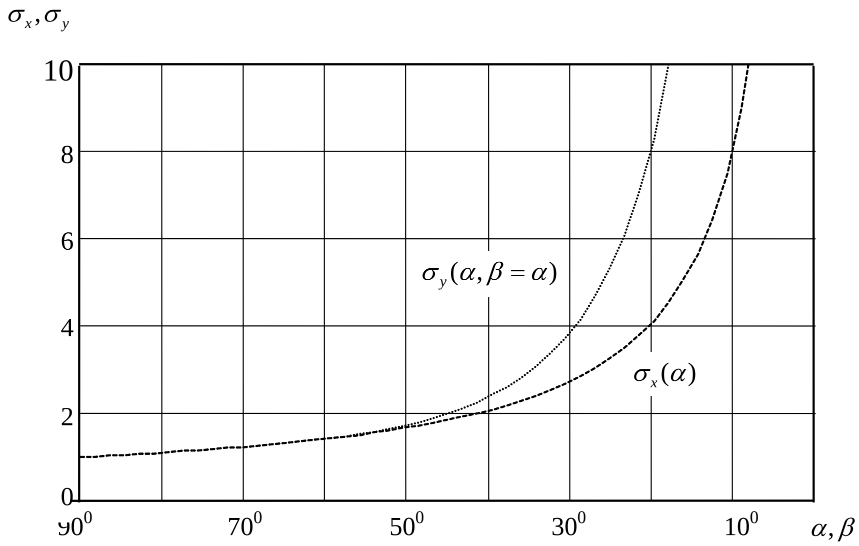


Рис. 10. Оценка степени ухудшения продольного и поперечного разрешения в классической схеме измерений

На рисункеах 10–11 представлены результаты расчетов, позволяющие проанализировать зависимости продольного и поперечного разрешения при одинаковом характере изменения параметров α и β. Заметим, что продольное разрешение при уменьшении α ухудшается более быстрыми темпами, чем поперечное. Более детальное исследование характера изменения продольного разрешения проиллюстрировано на рис. 11.

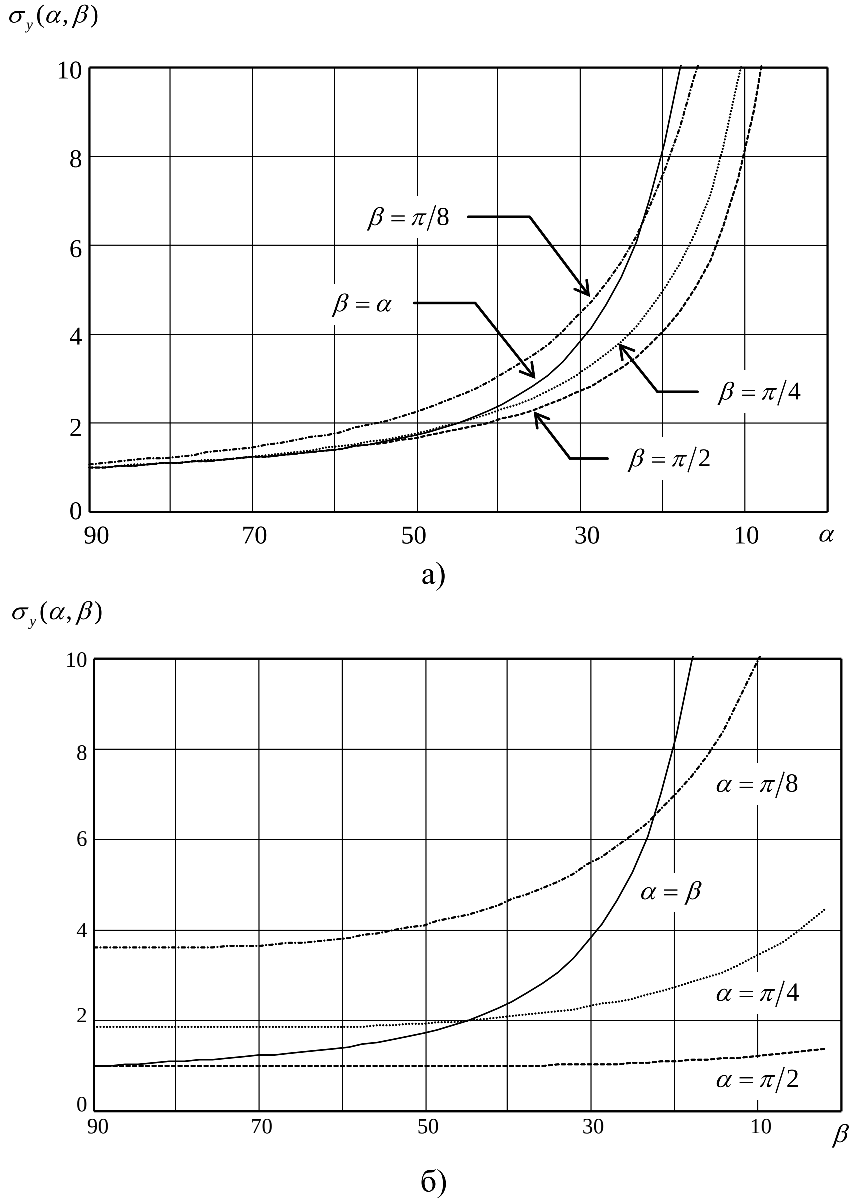


Рис. 11. Оценка степени ухудшения продольного разрешения в классической схеме измерений в зависимости от параметров α (а) и от β (б)

Заключение

В статье проанализированы три наиболее распространенных схемы измерений, причем для классической схемы рассмотрены случаи как идеальных, так и реальных измерений. Показано, что в случае реальных измерений разрешение может ухудшаться на порядок. Ограниченный объем статьи не позволил включить некоторые другие варианты, однако изложенный подход можно при необходимости применить самостоятельно. Кроме того, представленным в статье методом можно анализировать характеристики более сложных схем измерений, включающих в качестве составных элементов исследованные многоракурсные и многочастотные схемы; при таком объединении измерений удается расширить область данных на плоскости пространственных частот и улучшить ряд параметров реконструкции изображений.

Список литературы

1. Осетров А.В. Акустическая томография: Учеб. пособие / ГЭТУ. СПб., 2013. 64 с.

2. Буров В.А., Румянцева О.Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч.1: Обратные задачи излучения в акустике. Ч.1. URSS. 2017. 384 с.

3. Johanna L. Miller Ultrasound resolution beats the diffraction limit Physics Today V.69, N2. 2016, pp.14-16.