

УДК: 534

OECD: 01.03.AA

О связи волн Толлмина-Шлихтинга с акустическими волнами

Воронков С.С.

К.т.н., доцент кафедры «Архитектура и строительство»,
Псковский Государственный Университет, г. Псков, РФ

Аннотация

Рассматривается связь волн Толлмина-Шлихтинга с акустическими волнами. Ставится под сомнение правомерность допущения о несжимаемости среды при рассмотрении волн Толлмина-Шлихтинга в пограничном слое вязкого теплопроводного газа. Получено волновое уравнение, описывающее связь акустических волн с волнами Толлмина-Шлихтинга, представляющими собой параметрические колебания. Параметром, возбуждающим колебания, является дивергенция скорости, от которой зависит скорость распространения возмущений. Приводятся результаты вычислительного эксперимента. Показано, что на передней кромке пластины в пограничном слое происходит резкий скачок термодинамических параметров воздушной среды: давления, плотности, температуры, а также дивергенции скорости.

Ключевые слова: волны Толлмина-Шлихтинга, акустические волны, волновое уравнение, скорость звука, дивергенция скорости, пограничный слой, вязкий теплопроводный газ.

On the connection of Tollmin-Schlichting waves with acoustic waves

Voronkov S.S.

PhD, associate professor of the department of Architecture and Construction,
Pskov State University, Pskov, Russia

Abstract

The relationship of waves Tollmin-Schlichting with acoustic waves examines. The validity of the assumption of incompressibility of the medium when considering Tollmin-Schlichting waves in the boundary layer of a viscous heat-conducting gas is questioned. A wave equation describing the relationship of acoustic waves with Tollmin-Schlichting waves, which are parametric vibrations, is obtained. The parameter that excites the oscillations is the divergence of the velocity, which determines the speed of propagation of perturbations. The results of a computational experiment are presented. It is shown that at the leading edge of the plate in the boundary layer there is a sharp jump in the thermodynamic parameters of the air medium: pressure, density, temperature, and velocity divergence.

Keywords: Tollmin-Schlichting waves, acoustic waves, wave equation, speed of sound, velocity divergence, boundary layer, viscous heat-conducting gas.

Введение

В работе [1] экспериментально установлено, что волны Толлмина-Шлихтинга, волны неустойчивости в ламинарном пограничном слое, генерируются на передней кромке пластины - рис. 1. Также установлено [1] влияние акустических возмущений на генерацию волн Толлмина-Шлихтинга. Авторы работы [1] сформулировали один из ключевых вопросов проблемы восприимчивости пограничного слоя: «как могут возбудиться волны Т-Ш, имеющие фазовую скорость, равную $\sim 0,3-0,4$ скорости внешнего потока, акустическими волнами, скорость распространения которых на 1-2 порядка выше, или внешней турбулентностью, распространяющейся примерно со скоростью основного потока?»

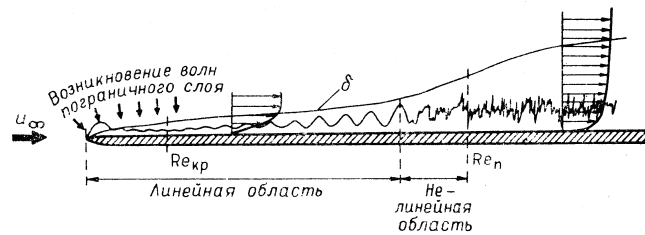


Рис. 1. Рисунок из работы [1]

Уравнение, описывающее возникновение волн Толлмина-Шлихтинга, уравнение Орра-Зоммерфельда, получено в предположении несжимаемости среды [2]. Возникает вопрос о правомерности экстраполяции допущения о несжимаемости среды, справедливого для жидкостей, на вязкий теплопроводный газ. В работе [3] показано, что при рассмотрении возникновения турбулентности необходимо учитывать сжимаемость среды.

Покажем, что уравнение, описывающее связь волн Толлмина-Шлихтинга с акустическими волнами, выводится из уравнений, учитывающих сжимаемость среды.

1. Вывод уравнения

Для вывода привлечем уравнение Навье-Стокса, уравнение для пульсаций давления, уравнение неразрывности. Уравнения приведены в работе [4].

Рассмотрим распространение малых возмущений скорости, давления и плотности. Выполним следующие преобразования. Уравнение Навье-Стокса продифференцируем по времени $\frac{\partial}{\partial t}$, уравнение для давления продифференцируем оператором набла $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$, подставив в него производную плотности из уравнения неразрывности. Подставляя полученное уравнение для давления в уравнение Навье-Стокса, пренебрегая величинами второго порядка малости, пренебрегая членами с вязкостью и теплопроводностью, ответственными за диссипацию энергии, после соответствующих преобразований, получим следующее волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = \left(a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (1)$$

где \mathbf{V} – вектор скорости, a_s – адиабатная скорость звука, ν – коэффициент кинематической вязкости, k – показатель адиабаты.

Действительно, рассмотрим случай, когда скорость имеет потенциал φ

$$\mathbf{V} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (2)$$

где φ – потенциал скорости.

Подставляя (2) в уравнение (1), учитывая, что [5]

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi, \quad (3)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, после преобразований получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(a_s^2 - \frac{4}{3}(k-1)\nu \nabla^2 \varphi \right) \nabla^2 \varphi. \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой волновое акустическое уравнение для потенциала скорости и отличается от классического волнового уравнения тем, что скорость звука здесь зависит от потенциала скорости

$$a^2 = a_s^2 - \frac{4}{3}(k-1)\nu \nabla^2 \varphi. \quad (5)$$

Но так как коэффициент кинематической вязкости является малой величиной (для воздуха $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м²/с, показатель адиабаты $k = 1,4$), в большинстве случаев вторым членом в (5) можно пренебречь.

Положение меняется при движении в пограничном слое, где течение не является потенциальным и необходимо рассматривать волновое уравнение в виде (1). Возникает вопрос: как будут изменяться плотность и дивергенция скорости?

2. Вычислительный эксперимент

Описание математической модели и численного метода приведено в работе [3].

Расчет выполнялся для воздуха. Максимальная скорость потока принималась равной 5,6 м/с. Передняя кромка пластины располагается с узла $i = 6$. В качестве граничных условий задавалось постоянное распределение давления и температуры на входной и выходной границах. На нижней и верхней границах для давления и температуры задавались градиентные граничные условия.

Анализировалось распределение давления, плотности, температуры и дивергенции скорости вдоль пластины в пограничном слое.

На рис. 2 и 3 приведены профили скоростей u и v в пограничном слое. Из рис. 2 следует, что на передней кромке пластины происходит резкое изменение скорости v .

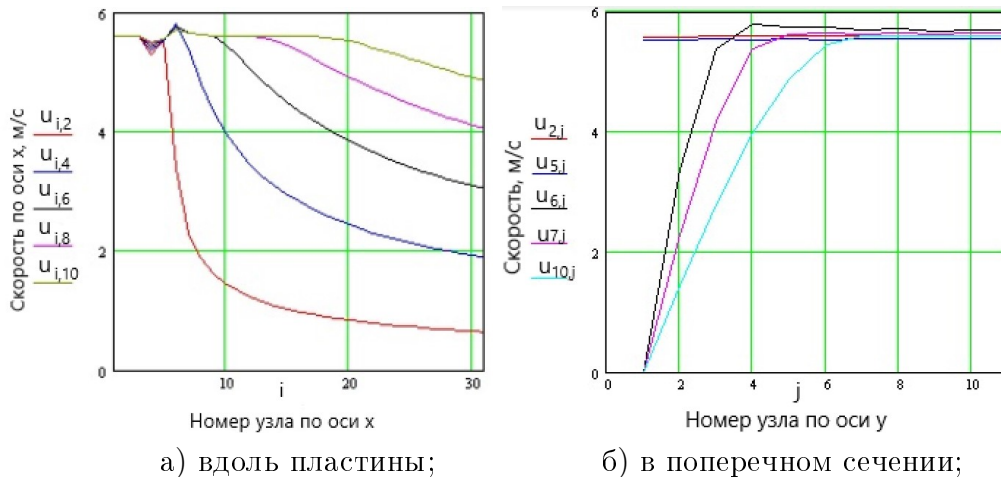


Рис. 2. Изменение скорости u воздуха в пограничном слое в момент времени $t=20$

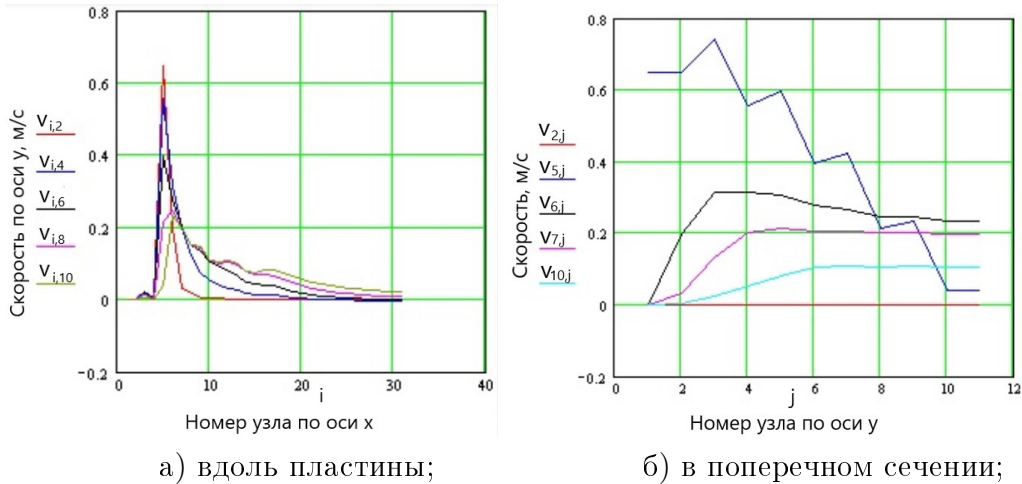


Рис. 3. Изменение скорости v воздуха в пограничном слое в момент времени $n=20$

На рис. 4,5,6 приведены графики изменения давления, плотности и температуры вдоль пластины. На передней кромке пластины происходит резкий скачок этих параметров.

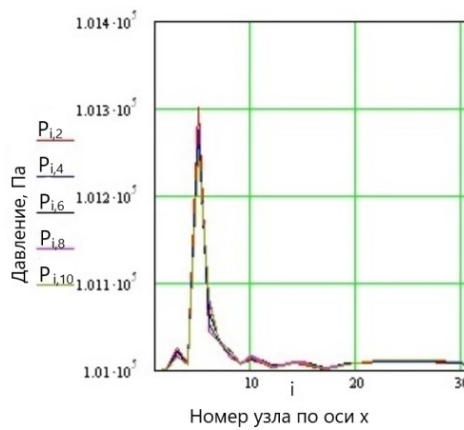


Рис. 4. Изменение давления p воздуха в пограничном слое вдоль пластины в момент времени $n=20$

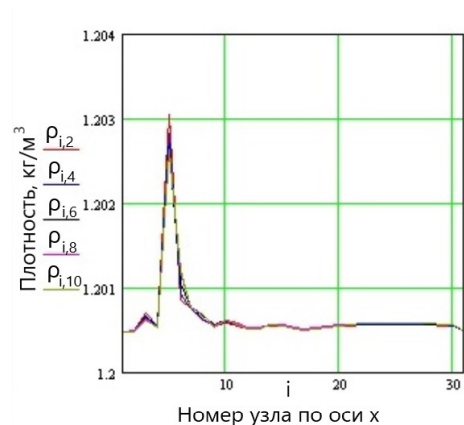


Рис. 5. Изменение плотности ρ воздуха в пограничном слое вдоль пластины в момент времени $n=20$

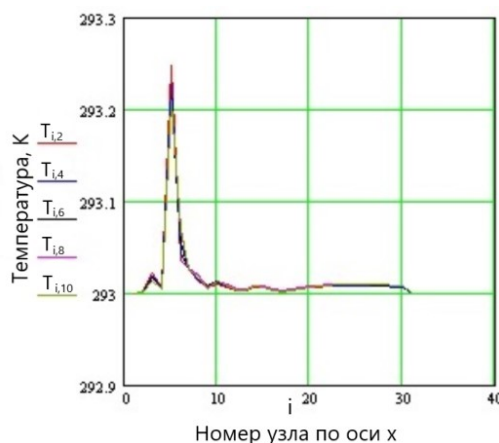


Рис. 6. Изменение температуры T воздуха в пограничном слое вдоль пластины в момент времени $n=20$

На рис. 7 приведен график изменения дивергенции скорости вдоль пластины. На передней кромке пластины происходит резкий скачок этой величины с отрицательным знаком.

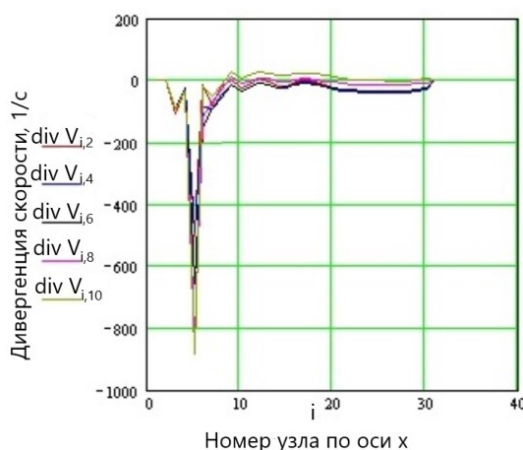


Рис. 7. Изменение дивергенции скорости $\text{div}\mathbf{V}$ воздуха в пограничном слое вдоль пластины в момент времени $n=20$

Полученные результаты ставят под сомнение правомерность допущения о несжимаемости среды при анализе возникновения волн Толлмина-Шлихтинга, которое предполагает, что

$$\text{div}\mathbf{V} = 0. \quad (6)$$

На передней кромке пластины дивергенция скорости принимает значение порядка $\text{div}\mathbf{V} = -800$ (смотри рис. 7).

Дивергенция скорости входит в качестве параметра в формулу для скорости звука в полученном волновом уравнении (1). Запишем его, учитывая, что [5]

$$\text{grad div}\mathbf{V} = \nabla^2\mathbf{V} + \text{rot rot}\mathbf{V}, \quad (7)$$

в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = \left(a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \cdot [\nabla^2 \mathbf{V} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V}]. \quad (8)$$

Выражение в круглых скобках представляет собой скорость распространения возмущений

$$a^2 = a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V}. \quad (9)$$

Экспериментальные данные о генерации волн Толлмина-Шлихтинга, полученные в работе [1], и результаты вычислительного эксперимента о характере изменения дивергенции скорости на передней кромке пластины – рис. 7, позволяют рассматривать волны Толлмина-Шлихтинга как параметрические колебания. Параметром, возбуждающим колебания, является дивергенция скорости, от которой зависит скорость распространения возмущений.

Заключение

Показано, что полученное волновое уравнение описывает акустические волны и волны Толлмина-Шлихтинга, представляющие для вязкого теплопроводного газа параметрические колебания, возникающие в пограничном слое на передней кромке пластины. Параметром, возбуждающим колебания, является дивергенция скорости, от которой зависит скорость распространения возмущений.

Список литературы

1. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. "Возникновение турбулентности в пограничном слое" // Новосибирск: Наука, 1982. – 151 с.
2. Шлихтинг Г. "Теория пограничного слоя" // М.: Наука, 1974. – 712 с.
3. Воронков С.С. "О законе возникновения турбулентности в пограничном слое вязкого теплопроводного газа" // Электронный журнал «Техническая акустика», – Режим доступа. – URL: <http://www.ejta.org/> (дата обращения 24.08.2020), 2016, 6.
4. Воронков С.С. "Об источниках аэродинамического шума в вязком теплопроводном газе" // Научный журнал «Noise Theory and Practice», – Режим доступа. – URL: <http://www.noisetp.com/ru/issues/> (дата обращения 24.08.2020), Том 3 №3 (III, 2017). С. 31-38.
5. Лойцянский Л.Г. "Механика жидкости и газа" // Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. – 736 с.

References

1. Kachanov Yu.S., Kozlov V.V., Levchenko V.Ya. "Occurrence of turbulence in the boundary layer" // Novosibirsk: Nauka, 1982, 151 p.
2. Schlichting G. "Theory of the boundary layer" // Moscow: Nauka, 1974, 712 p.
3. Voronkov S.S. "On the law of turbulence in the boundary layer of a viscous heat-conducting gas" // Electronic magazine "Technical acoustics", - access Mode. - URL: <http://www.ejta.org/> (24.08.2020), 2016, 6.

4. Voronkov S.S. "On sources of aerodynamic noise in a viscous heat-conducting gas" // Scientific journal "Noise Theory and Practice", - access Mode. - URL: <http://www.noisetp.com/ru/issues/> (24.08.2020), Volume 3 №3 (III, 2017). Pp. 31-38.

5. Loitsyansky L.G. "Mechanics of liquid and gas" // Ed.-M.: Nauka, 1978. - 736 p.