

УДК: 534.121.1
OECD: 01.03.AA

Собственные частоты колебаний пластины на упругом основании винклеровского типа

Канев Н.Г.*

Доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, РФ

Аннотация

Установлена простая взаимосвязь между собственными частотами колебаний пластины произвольной формы на упругом основании винклеровского типа с произвольными граничными условиями, собственными частотами колебаний этой пластины без упругого основания и жесткостью основания. На примере прямоугольной пластины с опертыми краями подробно рассмотрена задача о ее колебаниях на жестком основании. Показано, что жесткое основание в значительной степени демпфирует колебания плиты и их резонансные свойства не проявляются.

Ключевые слова: собственные частоты колебаний, пластина, основание Винклера.

Eigenfrequencies of a plate on a Winkler elastic foundation

Kanev N.G.*

Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract

A simple relationship is established between the eigenfrequencies of a plate of arbitrary shape on a Winkler elastic foundation with arbitrary boundary conditions, the eigenfrequencies of this plate without the elastic foundation, and the foundation elasticity. On the example of a simply supported rectangular plate, its oscillations on a rigid foundation are considered in detail. It is shown that the rigid foundation significantly damps plate oscillations and their resonant properties do not appear.

Keywords: eigenfrequencies, plate, Winkler foundation.

Введение

Задачи о колебании пластин на упругом основании возникают в различных областях прикладной акустики. Важное значение для практических расчетов имеют собственные частоты колебаний таких пластин, особенно в области первых резонансов. Колебания пластин на упругом основании исследованы во многих работах [1-4], в отдельных случаях получены формулы для расчета собственных частот пластин [5,6]. В настоящей работе приводится простой способ расчета собственных частот изгибных колебаний пластины с произвольными граничными условиями, расположенной на упругом основании винклеровского типа.

*E-mail: nikolay.kanev@mail.ru (Канев Н.Г.)

1. Собственные частоты пластины

Рассмотрим пластину произвольной формы толщиной h . Плотность пластины ρ , изгибная жесткость D . Смещение пластины w задается известным уравнением[7]:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w = 0. \quad (1)$$

Пусть кривая L является границей пластины, на которой выполняются, как правило, два граничных условия:

$$F_1(w)|_L = 0, F_2(w)|_L = 0. \quad (2)$$

Конкретный вид функций F_1 и F_2 зависит от типа граничных условий. Например, для заземленной пластины они имеют вид $F_1(w) = w$ и $F_2(w) = \partial w / \partial n$. Далее для определенности пластину, колебания которой определяются уравнениями (1) и (2), будем называть ненагруженной, т.е. ее поверхность свободна от внешней нагрузки.

Гармонические колебания пластины описываются уравнением:

$$-\rho h \omega^2 w + D \Delta^2 w = 0. \quad (3)$$

где ω - круговая частота. Примем, что решение системы уравнений (2) и (3) представляется в виде набора собственных функций u_n с собственными частотами ω_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Свободные колебания пластины имеют вид $w = \sum_n A_n u_n$.

Теперь рассмотрим пластину на упругом основании винклеровского типа с жесткостью k . В уравнение движения (1) необходимо добавить силу, действующую на пластину со стороны основания:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w = -k w. \quad (4)$$

Из (4) получаем уравнение для гармонических колебаний:

$$(-\rho h \omega^2 + k) w + D \Delta^2 w = 0. \quad (5)$$

Введем частоту $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \frac{k}{\rho h}$, тогда (5) преобразуется к виду:

$$-\rho h \tilde{\omega}^2 w + D \Delta^2 w = 0. \quad (6)$$

Уравнения (3) и (6) имеют одинаковый вид, поэтому их решения в совокупности с граничными условиями (2) также определяются набором собственных функций u_n , но при этом $\tilde{\omega}_n = \omega_n$. Таким образом, пластина на упругом основании имеет те же собственные функции, что и ненагруженная пластина, но их собственные частоты отличаются. При этом они связаны простым выражением:

$$\Omega_n^2 = \omega_n^2 + \omega_0^2. \quad (7)$$

где Ω_n - собственные частоты пластины на упругом основании, $\omega_0^2 = k/\rho h$ - резонансная частота поршневых колебаний пластины на упругом основании (простейшая колебательная система - масса ρh на пружине k).

Таким образом, если известны собственные частоты колебаний ненагруженной пластины любой формы и с любыми граничными условиями [8], то собственные частоты ее колебаний на упругом основании с известной жесткостью могут быть легко найдены с помощью выражения (7).

Если первая собственная частота ненагруженной пластины ω_1 значительно больше резонансной частоты ω_0 , т.е. $\omega_1 \gg \omega_0$, то жесткость основания мала по сравнению с жесткостью пластины, поэтому такое основание можно назвать мягким. В этом случае упругое основание не оказывает сильного влияния на собственные частоты пластины, поскольку $\Omega_n \approx \omega_n$.

В противоположном случае жесткого основания, т.е. $\omega_1 \ll \omega_0$, несколько первых собственных частот пластины на основании имеют близкие значения $\Omega_n \approx \omega_0$ при $n < n_0$, для которых $\omega_{n0} < \omega_0$. Таким образом, жесткое основание значительно влияет на собственные частоты пластины.

Аналогичные результаты справедливы для балки на упругом основании [6], для которой граничные условия (2) задаются на концах балки. Если известны собственные частоты балки с некоторыми граничными условиями, то собственные частоты балки на упругом винклеровском основании рассчитываются согласно (7).

2. Жесткое основание

Рассмотрим подробнее случай жесткого основания на примере прямоугольной пластины с опертыми краями. Собственные частоты колебаний ненагруженной пластины определяются следующим выражением [7]:

$$\omega_{n,m} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right). \quad (8)$$

где a и b - длины сторон пластины, $n, m = 1, 2, 3, \dots$

Введем параметр $\gamma = a/b$, тогда (8) может быть выражено следующим образом:

$$\omega_{n,m} = \omega_{1,1} \frac{n^2 + \gamma^2 m^2}{1 + \gamma^2}. \quad (9)$$

Далее отнормируем все частоты задачи на частоту $\omega_{1,1}$ (термин безразмерные будем опускать для краткости):

$\bar{\omega}_{n,m} = \frac{\omega_{n,m}}{\omega_{1,1}}$ - собственные частоты колебаний ненагруженной пластины;

$\bar{\Omega}_{n,m} = \frac{\Omega_{n,m}}{\omega_{1,1}}$ - собственные частоты колебаний пластины на упругом основании;

$\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\omega_{1,1}}$ - резонансная частота поршневых колебаний пластины на упругом основании;

$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{1,1}}$.

Теперь выражение (7) может быть представлено в виде:

$$\bar{\Omega}_{n,m}^2 = \left(\frac{n^2 + \gamma^2 m^2}{1 + \gamma^2} \right)^2 + \bar{\omega}_0^2. \quad (10)$$

Очевидно, что частота $\bar{\omega}_0$ характеризует жесткость упругого основания по сравнению с изгибной жесткостью пластины, для жесткого основания $\bar{\omega}_0 \gg 1$. На рис. 1 приведено сопоставление собственных частот пластины с размерами $\gamma = 2$ на жестком основании $\bar{\omega}_0 = 10$ и собственных частот ненагруженной пластины $\bar{\omega}_0 = 0$. Проколотые точки на рис.1 представляют собственные частоты ненагруженной пластины, поэтому можно легко оценить изменение собственных частот пластины при ее установке на упругое основание.

Наибольшее отличие между частотами $\bar{\Omega}_{n,m}$ и $\bar{\omega}_{n,m}$ имеет место для самой низкой собственной частоты $\bar{\omega}_{1,1} = 1$. С увеличением $\bar{\omega}_{n,m}$ разница между собственными

частотами пластины на упругом основании и ненагруженной пластины уменьшается. В пределе $\bar{\omega}_{n,m} \rightarrow \infty$ собственные частоты становятся почти одинаковыми $\bar{\Omega}_{n,m} \approx \bar{\omega}_{n,m}$.

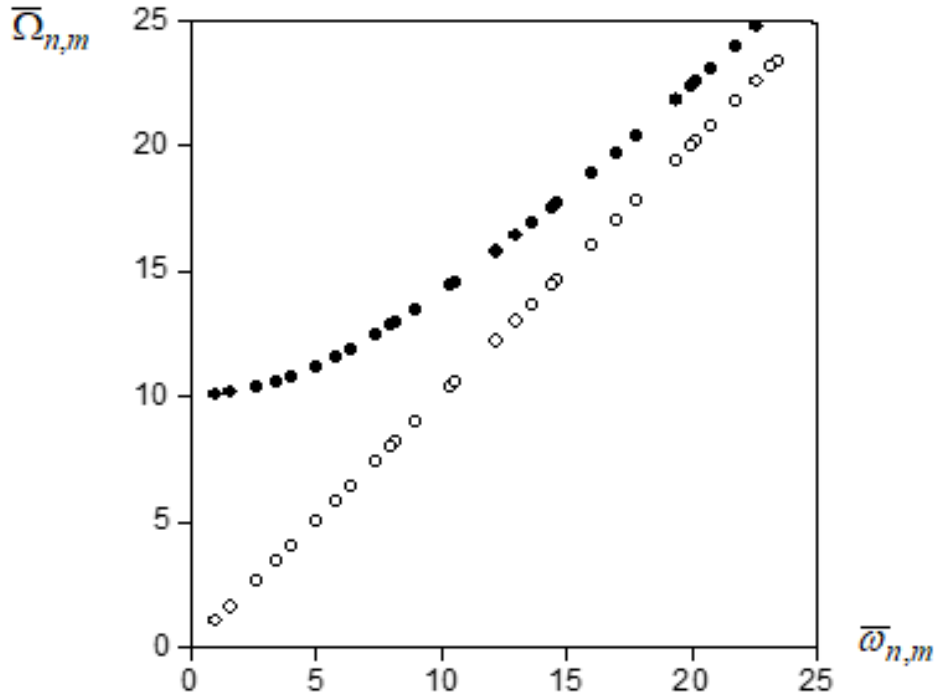


Рис. 1. Зависимость безразмерных собственных частот $\bar{\Omega}_{n,m}$ пластины с размерами $\gamma = 2$ на жестком $\bar{\omega}_0 = 10$ (●) и мягком $\bar{\omega}_0 = 0$ (○) основаниях от безразмерных собственных частот $\bar{\omega}_{n,m}$ ненагруженной пластины

Как видно на рис.1, вблизи частоты $\bar{\omega}_0$ находится несколько собственных частот $\bar{\Omega}_{n,m}$.

Найдем количество собственных колебаний пластины N , частоты которых ниже частоты $\bar{\omega}$ для ненагруженной пластины и пластины на упругом основании. Для ненагруженной пластины этот параметр легко может быть найден аналитически:

$$N \approx \frac{\pi}{4} \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \bar{\omega}. \quad (11)$$

Плотность мод $dN/d\bar{\omega}$ не зависит от частоты. Зависимость $N(\bar{\omega})$ для различных резонансных частот $\bar{\omega}_0$ приведена на рис. 2. Количество мод ненагруженной пластины увеличивается линейно с частотой согласно (11), при этом пластина на упругом основании не имеет собственных колебаний на частотах ниже $\bar{\omega}_0$. Но выше количество мод резко растет, при $\bar{\omega} \gg \bar{\omega}_0$ зависимости $N(\bar{\omega})$ для обоих типов пластин становятся близкими.

Отметим отличие частотной зависимости плотности мод звуковых колебаний в двумерном помещении. Количество мод помещения пропорционально квадрату частоты $N \sim \bar{\omega}^2$, а их плотность растет линейно с увеличением частоты [9]. На достаточно высоких частотах плотность мод становится такой, что резонансные кривые колебаний перекрывают друг друга, а резонансные свойства колебаний оказываются совершенно стертыми. В рассматриваемом случае пластины на жестком основании подобная картина наблюдается, напротив, в области первых резонансных частот.

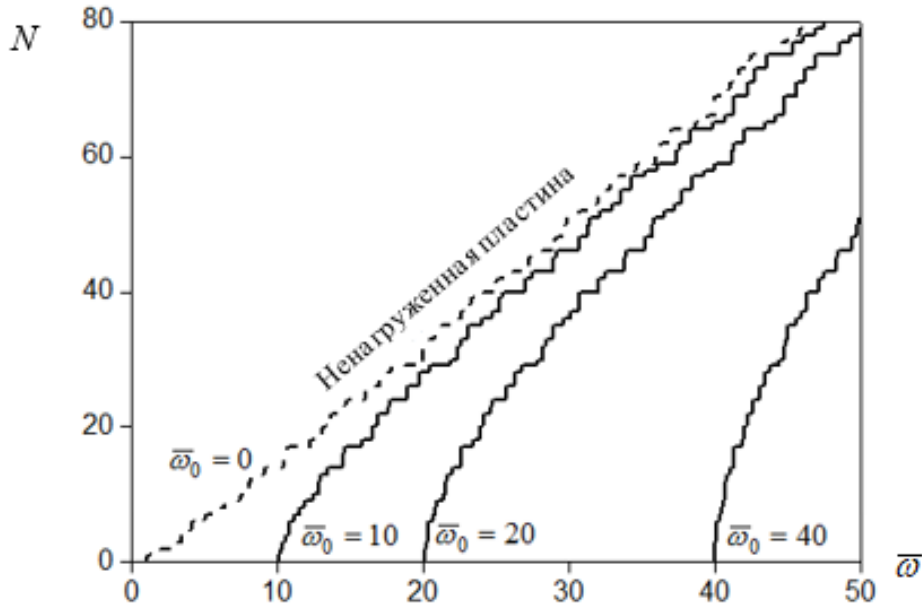


Рис. 2. Количество собственных колебаний N с частотами ниже $\bar{\omega}$ ненагруженной пластины и пластины на упругом основании, жесткость которого определяется частотой $\bar{\omega}_0$

3. Энергия колебаний пластины

В задачах виброизоляции особое значение имеют энергетические характеристики колебаний виброизолированных структур. Для исследования энергии колебания пластины на упругом основании введем кинетическую энергию:

$$E = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^b |v(x,y)|^2 dx dy = \frac{1}{2}\rho h \omega^2 \int_0^a \int_0^b |w(x,y)|^2 dx dy, \quad (12)$$

где $v = \dot{w}$ - скорость пластины.

Рассмотрим пластину, опертую по контуру, ее смещение – это суперпозиция собственных колебаний:

$$w(x,y) = \sum_{n,m} A_{nm} \varphi_{nm}, \quad (13)$$

где $\varphi_{nm} = \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}$ - собственные колебания, A_{nm} - амплитуда моды (n,m) . Собственные функции ортогональны, поэтому:

$$\int_0^a \int_0^b \varphi_{nm} \varphi_{n'm'} dx dy = \frac{ab}{4} \begin{cases} 1, & \text{при } n = n', m = m' \\ 0, & \text{при } n \neq n', m \neq m' \end{cases}. \quad (14)$$

С помощью (14) находим из (12):

$$E = \frac{1}{8} M \omega^2 \sum_{n,m} |A_{nm}|^2, \quad (15)$$

где M - масса пластины. Амплитуда моды может быть записана в следующем виде:

$$A_{nm} = \frac{F_{nm}}{\rho h (\Omega_{nm}^2 (1 + i\varepsilon) - \omega^2)}, \quad (16)$$

где ε - коэффициент потерь, введенный согласно [10], F_{nm} - коэффициент возбуждения моды, зависящий от способа возбуждения колебаний пластины.

Согласно (15) и (16) ненагруженная пластина имеет максимум кинетической энергии на первой собственной частоте $\omega_{1,1}$:

$$E_{1,1} = \frac{M}{8\rho^2 h^2 \omega_{1,1}^2 \varepsilon^2} |F_{1,1}|^2. \quad (17)$$

В первую очередь нас интересует энергия колебаний пластины, а не способ возбуждения этих колебаний, поэтому для упрощения положим F_{nm} одинаковым для всех мод. Из (15), (16), (17) можно ввести безразмерную кинетическую энергию:

$$\bar{E} = \frac{E}{E_{1,1}} = \varepsilon^2 \bar{\omega}^2 \sum_{n,m} \frac{1}{|\bar{\Omega}_{nm}^2 (1 + i\varepsilon) - \bar{\omega}^2|^2}. \quad (18)$$

Расчет энергии колебаний ненагруженной пластины и пластины на упругом основании приведен на рис. 3 для коэффициента потерь $\varepsilon = 0.1$. Энергия мала на частотах ниже $\bar{\omega}_0$ и максимальна на частоте $\bar{\omega}_0$. При этом для пластины на упругом основании нет острого пика на частоте $\bar{\omega}_0$, а максимальная амплитуда колебаний уменьшается с ростом $\bar{\omega}_0$. Таким образом, при большой плотности мод резонансные колебания плиты не проявляются.

Оценим энергию на частоте $\bar{\omega}_0$ для жесткого основания ($\bar{\omega}_0 \gg 1$). Вблизи $\bar{\omega}_0$ есть примерно $N(\bar{\omega}_0)$ мод, поэтому из (18) получаем:

$$\bar{E}(\bar{\omega}_0) \approx \varepsilon^2 \bar{\omega}_0^2 \frac{N(\bar{\omega}_0)}{(\bar{\Omega}_{nm}^2 \varepsilon)^2} = \frac{\pi}{4} \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \frac{1}{\bar{\omega}_0}. \quad (19)$$

Таким образом, жесткое основание значительно демпфирует изгибные колебания пластины: энергия колебаний пластины уменьшается с увеличением жесткости основания.

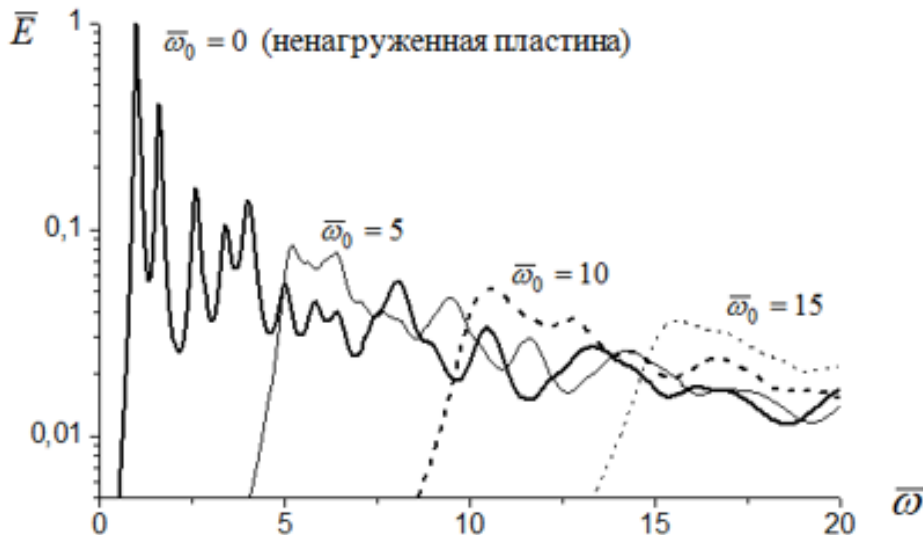


Рис. 3. Кинетическая энергия колебаний пластины

Заключение

Предложен простой способ расчета частот собственных колебаний пластины, лежащей на сплошном упругом основании. Если известны собственные частоты пластины произвольной формы с произвольными граничными условиями и жесткость основания, то собственные частоты этой же пластины на основании могут быть рассчитаны по формуле (7). При этом формы собственных колебаний пластины не изменяются.

Мягкое основание, жесткость которого мала по сравнению с изгибной жесткостью пластины, слабо влияет на собственные частоты пластины. Основание, жесткость которого велика по сравнению с изгибной жесткостью пластины, напротив, приводит к существенному увеличению значений собственных частот. Несколько первых собственных частот оказываются настолько близки друг к другу, что резонансный характер колебаний плиты не проявляется.

Список литературы

1. Salari M., Bert C.M., Striz, A.G. Free vibration of a solid circular plate free at its edge and attached to a Winkler foundation // J. Sound Vib. – 1987. – V. 118 – P. 188-191.
2. Wang C.Y. Fundamental frequency of a circular plate supported by a partial elastic foundation // J. Sound Vib. – 2005. – V. 285. – P. 1203-1209.
3. Bastián-Monarca N.A., Arenas J.P. Study of the sound radiation of a rectangular plate resting on a winkler elastic foundation // Proc. Mtgs. Acoust. – 2017. – V.28, 065002.
4. Доронин А.М., Соболева В.А. Собственные колебания круглой пластинки, лежащей на переменном упругом основании типа Винклера // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – № 4. – С. 254-258.
5. Папков С.О. Колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями: анализ и решение бесконечной системы // Акуст. журн. – 2015. – Т. 61, № 2. – С. 152-160.
6. Канев Н.Г. Изоляция изгибных колебаний пластины упругим слоем при неравномерном вибрационном воздействии // Акуст. журн. – 2014. – Т. 60, № 6. – С. 696-700.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
8. Leissa A.W. Vibration of plates. Acous. Soc. Am., Sewickley, PA, 1993.
9. Исакович М.А. Общая акустика. М: Наука, 1978.
10. Бобровницкий Ю.И. Гистерезисное демпфирование и причинность // Акуст. журн. – 2013. – Т. 59, № 3. – С. 291-295.

References

1. Salari M., Bert C.M., Striz, A.G. Free vibration of a solid circular plate free at its edge and attached to a Winkler foundation // J. Sound Vib. – 1987. – V. 118 – P. 188-191.
2. Wang C.Y. Fundamental frequency of a circular plate supported by a partial elastic foundation // J. Sound Vib. – 2005. – V. 285. – P. 1203-1209.
3. Bastián-Monarca N.A., Arenas J.P. Study of the sound radiation of a rectangular plate resting on a winkler elastic foundation // Proc. Mtgs. Acoust. – 2017. – V.28, 065002.
4. Doronin A.N., Soboleva V.A. Natural oscillations of a circular plate resting on a variable Winkler elastic foundation // Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. – 2014. – № 4. – P. 254-258.

-
5. Papkov S.O. Vibrations of a rectangular orthotropic plate with free edges: Analysis and solution of an infinite system // *Acoust. Phys.* – 2015. – T. 61, № 2. – P. 136-143.
 6. Kanev N.G. Flexural vibration insulation with an elastic layer for a plate under nonuniform vibratory action // *Acoust. Phys.* – 2014. – V. 60, № 6. – P. 727-731.
 7. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press, 1970.
 8. Leissa A.W. *Vibration of plates*. Acous. Soc. Am., Sewickley, PA, 1993.
 9. Isakovich M.A. *General Acoustics*. Nauka, Moscow, 1973.
 10. Bobrovnitskii Yu.I. Hysteretic damping and causality // *Acoust. Phys.* – 2013. – V. 59, № 3. – P. 253–256.