УДК 534.23

OECD 01.03.AA

О равнораспределении энергии случайных вибраций в ограниченной оболочке

Казаков Л.И.*
К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН, г. Владивосток

Аннотация

Рассмотрены вынужденные вибрации тонкой ограниченной цилиндрической оболочки, возбуждаемые произвольными силами. Из-за конечных размеров оболочки в ней устанавливаются стоячие волны собственных квазипродольных, квазисдвиговых (крутильных) и квазиизгибных колебаний. Каждое такое колебание ассоциируется с сосредоточенным акустическим резонатором. Получены простые приближенные формулы для собственных частот резонаторов. Расчетом установлено равнораспределение кинетической энергии колебаний по степеням свободы – собственным колебаниям оболочки при её возбуждении множественными ударами. При стационарных случайных вибрациях равнораспределение справедливо для собственных колебаний оболочки с близкими частотами.

Ключевые слова: ограниченная оболочка, вибрации, собственные колебания, акустические резонаторы, резонансные частоты, равнораспределение энергии случайных вибраций.

About equidistribution energy of random vibrations in a limited shell

Kazakov L. I.
K. F.-M. N., leading researcher, Pacific Oceanological Institute named after V. I. Il'ichev FEB RAS, Vladivostok

Abstract

Forced vibrations of a thin bounded cylindrical shell excited by arbitrary forces are considered. Due to the finite size of the shell, standing waves of proper quasi-longitudinal, quasi-shear (torsional) and quasi-flexural oscillations are established in it. Each such oscillation is associated with a concentrated acoustic resonator. The simple approximate formulas for the natural frequencies of the resonators are obtained. The calculation established the equidistribution of the kinetic energy of oscillations in degrees of freedom – its natural vibrations of the shell when it is excited by multiple strikes. For stationary random vibrations equidistribution is true for the natural oscillations of the shell with close frequencies.

***Key words**: limited shell, vibrations, natural oscillations, acoustic resonators, resonant frequencies, equidistribution of random vibration energy.*

Введение

В статистической физике есть знаменитый закон Больцмана о равнораспределении кинетической энергии тепловых движений по степеням свободы тел [1, с. 149], [2, с.456]. Этот удивительный закон «обладает огромным диапазоном применения» [3, с. 172]. Например, ему подвержены не только молекулы газа, но и зеркальце гальванометра (макроскопический объект!), совершающее броуновское «дрожание» под ударами этих молекул [4, с. 46], [5, с. 413] (что позволило найти значение постоянной Больцмана k).

E-mail: lev-kazakov@rambler.ru (Казаков Л.И.)

Рэлей был первым (1900 г.), кто отождествил собственные колебания тела (стоячие волны) с его степенями свободы [6, с. 83, 164]. Дебай использовал (1912 г.) такое представление применительно к звуковым волнам в твердом теле при создании теории его теплоемкости [7, с. 436]. Классическое приближение этой теории, приводящее к закону Дюлонга и Пти, как раз и состоит в утверждении справедливости закона Больцмана в акустике – по крайней мере, в акустике твердого тела. Ибо возбуждение в последнем акустических волн ударами молекул окружающего газа ничем не отличается от ударов твердыми шариками, каковыми и представляют молекулы в кинетической теории газа.

Между тем вопрос об акустической применимости закона равнораспределения в литературе совсем не разработан и практически даже не упоминается. Найдены лишь две статьи, где расчеты базируются на предположении о справедливости этого закона [8], [9].

К закону Больцмана, конечно, много претензий [10, с. 197]. Может быть поэтому и сам закон именуют по-разному. «Законом» его называют, например, в учебниках [1], [2], [10]. Другие называют это «теоремой о равнораспределении» [3], [4], [7]. Рэлей предпочитал определение «доктрина Максвелла – Больцмана» [6, с. 88]. Ключевым в этих определениях является слово “равнораспределение”. Так и будем далее называть это яркое явление физики.

Цель статьи: получить прямым расчетом равнораспределение по степеням свободы энергии случайных вынужденных вибраций в ограниченной цилиндрической оболочке.

1. Основной расчет

Оболочку будем считать замкнутой, круглой с радиусом срединной поверхности R, ограниченной длины L, малой толщины $h << R$. Совместим срединную поверхность оболочки с координатной поверхностью $\rho = R$ цилиндрической системы координат (ρ, φ, z). Края оболочки прямые, лежат в координатных плоскостях $z = 0$, $z = L$ и свободно оперты на неподвижные жесткие опоры. Рассмотрим воздействие на такую оболочку динамических нагрузок, произвольно распределенных по её поверхности.

Колебания оболочки будем описывать полученной В.З. Власовым [11] системой трех дифференциальных уравнений относительно смещений точек срединной поверхности в осевом (U_1), окружном (U_2) и радиальном (U_3) направлениях:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - L_{11}U_1 - L_{12}U_2 - L_{13}U_3 = \frac{1}{m_1 c_1^2}P_1, \\
\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - L_{21}U_1 - L_{22}U_2 - L_{23}U_3 = \frac{1}{m_1 c_1^2}P_2, \qquad (1) \\
-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} - L_{31}U_1 - L_{32}U_2 - L_{33}U_3 = -\frac{1}{m_1 c_1^2}P_3,
\end{gathered}$$

где L_{ij} – симметричная матрица линейных дифференциальных операторов:

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}; \quad L_{22} = \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2};$$

$$L_{12}=L_{21}=\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial s};\quad L_{23}=L_{32}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial s}-\frac{3-\sigma}{2}Ra^2\frac{\partial^3}{\partial z^2\partial s};\tag{2}$$

$$L_{13}=L_{31}=\frac{\sigma}{R}\frac{\partial}{\partial z}-Ra^2\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^3}{\partial z\partial s^2}\right);\ L_{33}=a^2\left(R^2\nabla^2\nabla^2+2\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{1}{R^2}\right)+\frac{1}{R^2};$$

$$a^2=\frac{h^2}{12R^2};\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial s^2};\quad \nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial s^2}+\frac{\partial^4}{\partial s^4};\quad s=R\varphi;$$

$c_1=\sqrt{\dfrac{E}{\rho_1\left(1-\sigma^2\right)}}$, м/с – скорость продольных волн в пластине, выполненной из материала оболочки с плотностью ρ_1, кг/м^3, модулем Юнга E, Па и коэффициентом Пуассона σ; $m_1=\rho_1 h$, кг/м^2 – поверхностная плотность оболочки; $P_{1,2,3}=P_{1,2,3}(z,\varphi,t)$, Н/м^2 – компоненты вектора внешних сил, приложенных к единице площади срединной поверхности оболочки, соответственно, в осевом (P_1), окружном (P_2) и радиальном (P_3) направлениях.

Условия свободного опирания краев оболочки означают равенство нулю при $z=0$, L нормальных сил $N_1(\varphi)$, изгибающих моментов $M_1(\varphi)$, окружных $U_2(\varphi)$ и радиальных $U_3(\varphi)$ смещений, т.е.

$$N_1(\varphi)=\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial U_1}{\partial z}+\frac{\sigma}{R}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\varphi}-U_3\right)\right]=0,$$

$$M_1(\varphi)=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}+\frac{\sigma}{R^2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial\varphi^2}\right)=0,$$

$$U_2(\varphi)=0,\quad U_3(\varphi)=0.$$

Эти граничные условия доставляют, по-видимому, единственную до сего времени возможность точного решения системы уравнений (1).

Следуя С.П. Тимошенко [12, с. 462], будем решать задачу методом разделения переменных, положив:

$$\left(U_1/P_1\right)(\varphi,z,t)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(U_1^{pm}/P_1^{pm}\right)(t)\cos\frac{\overline{p}z}{R}\cos m\varphi,$$

$$\left(U_2/P_2\right)(\varphi,z,t)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(U_2^{pm}/P_2^{pm}\right)(t)\sin\frac{\overline{p}z}{R}\sin m\varphi,\tag{3}$$

$$\left(U_3/P_3\right)(\varphi,z,t)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(U_3^{pm}/P_3^{pm}\right)(t)\sin\frac{\overline{p}z}{R}\cos m\varphi,$$

где

$$\overline{p}=\frac{\pi R}{L}p,\tag{4}$$

$$P_1^{pm}(t)=\frac{\varepsilon_m}{\pi L}\int_0^L\int_0^{2\pi}P_1(z,\varphi,t)\cos\frac{\overline{p}z}{R}\cos m\varphi dz d\varphi,$$

$$P_2^{pm}(t)=\frac{\varepsilon_m}{\pi L}\int_0^L\int_0^{2\pi}P_2(z,\varphi,t)\sin\frac{\overline{p}z}{R}\sin m\varphi dzd\varphi, \tag{5}$$

$$P_3^{pm}(t)=\frac{\varepsilon_m}{\pi L}\int_0^L\int_0^{2\pi}P_3(z,\varphi,t)\sin\frac{\overline{p}z}{R}\cos m\varphi dzd\varphi,$$

ε0 = 1,   εm = 2,   m = 1, 2, … ,

Подставив ряды (3) в систему уравнений (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, придем к системе неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций времени $U_{1,2,3}^{pm}(t)$:

$$\frac{R^2}{c_1^{\ 2}}\frac{d^2U_1^{pm}}{dt^2}+a_{11}U_1^{pm}+a_{12}U_2^{pm}+a_{13}U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\ 2}}P_1^{pm},$$

$$\frac{R^2}{c_1^{\ 2}}\frac{d^2U_2^{pm}}{dt^2}+a_{21}U_1^{pm}+a_{22}U_2^{pm}+a_{23}U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\ 2}}P_2^{pm}, \tag{6}$$

$$\frac{R^2}{c_1^{\ 2}}\frac{d^2U_3^{pm}}{dt^2}+a_{31}U_1^{pm}+a_{32}U_2^{pm}+a_{33}U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\ 2}}P_3^{pm},$$

где

$$a_{11}=\overline{p}^2+\frac{1-\sigma}{2}m^2,\quad a_{12}=a_{21}=-\frac{1+\sigma}{2}\overline{p}m,$$

$$a_{13}=a_{31}=-\overline{p}\left[\sigma+a^2\left(\overline{p}^2-\frac{1-\sigma}{2}m^2\right)\right],\quad a_{22}=\frac{1-\sigma}{2}\overline{p}^2+m^2, \tag{7}$$

$$a_{23}=a_{32}=m\left(1+\frac{3-\sigma}{2}a^2\overline{p}^2\right),\qquad a_{33}=1+a^2\left[\left(\overline{p}^2+m^2\right)^2-2m^2+1\right].$$

Пока будем считать m ≥ 1, когда ε_m = 2. Осесимметричный случай m = 0 обсудим отдельно.

Рассмотрим случай нулевых начальных условий, когда компоненты внешней нагрузки $p_{1,2,3}$ и смещения $u_{1,2,3}$ (3) как функции времени t равны нулю при t < 0. Будем считать эти функции абсолютно интегрируемыми и представимыми в виде интеграла Фурье. Такими же свойствами, очевидно, будут обладать и функции времени $U_{1,2,3}^{pm}(t)$ и $P_{1,2,3}^{pm}(t)$. Применив к обеим частям каждого из уравнений (6) одностороннее преобразование Фурье [13, с.173]

$$U_{1,2,3}^{pm}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U_{1,2,3}^{pm}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\quad U_{1,2,3}^{pm}(\omega)=\int_0^{\infty}U_{1,2,3}^{pm}(t)e^{i\omega t}dt, \tag{8}$$

$$P_{1,2,3}^{pm}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P_{1,2,3}^{pm}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\qquad P_{1,2,3}^{pm}(\omega)=\int_0^{\infty}P_{1,2,3}^{pm}(t)e^{i\omega t}dt,$$

где i – мнимая единица, ω, рад/с – круговая частота, придем к системе неоднородных алгебраических уравнений относительно комплексных спектров (точнее – спектральных плотностей) $U_{1,2,3}^{pm}(\omega)$, м·с функций времени $U_{1,2,3}^{pm}(t)$, м:

$$(a_{11}-\Omega^2)U_1^{pm}+a_{12}U_2^{pm}+a_{13}U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\ 2}}P_1^{pm},$$

$$a_{21}U_1^{pm}+(a_{22}-\Omega^2)U_2^{pm}+a_{23}U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\ 2}}P_2^{pm}, \tag{9}$$

$$a_{31}U_1^{pm}+a_{32}U_2^{pm}+(a_{33}-\Omega^2)U_3^{pm}=\frac{R^2}{m_1c_1^{\ 2}}P_3^{pm},$$

где

$$\Omega=\frac{\omega R}{c_1}. \tag{10}$$

В правых частях уравнений (9) стоят спектральные плотности $P_{1,2,3}^{pm}(\omega)$, Н·с/м^2 функций времени (5).

Решения системы (9) даются формулами Крамера, которые приводят к выражениям:

$$U_j^{pm}(\Omega)=\frac{R^2}{m_1c_1^{\ 2}D(\Omega^2)}\sum_{l=1}^{3}Q_{jl}(\Omega^2)P_l^{pm}(\Omega),\ \text{j = 1,2,3,} \tag{11}$$

где

$$D(\Omega^2)=-\Omega^6+b_1\Omega^4-b_2\Omega^2+b_3\ - \tag{12}$$

определитель системы (9),

$$b_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$b_2=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}^{\ 2}-a_{13}^{\ 2}-a_{23}^{\ 2}, \tag{13}$$

$$b_3=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}a_{23}^{\ 2}-a_{22}a_{13}^{\ 2}-a_{33}a_{12}^{\ 2};$$

$$Q_{11}(\Omega^2)=\Omega^4-(a_{22}+a_{33})\Omega^2+a_{22}a_{33}-a_{23}^{\ 2},$$

$$Q_{22}(\Omega^2)=\Omega^4-(a_{11}+a_{33})\Omega^2+a_{11}a_{33}-a_{13}^{\ 2},$$

$$Q_{33}(\Omega^2)=\Omega^4-(a_{11}+a_{22})\Omega^2+a_{11}a_{22}-a_{12}^{\ 2},$$

$$Q_{12}(\Omega^2)=Q_{21}(\Omega^2)=a_{12}\Omega^2+a_{13}a_{23}-a_{12}a_{33}, \tag{14}$$

$$Q_{13}(\Omega^2)=Q_{31}(\Omega^2)=a_{13}\Omega^2+a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22},$$

$$Q_{23}(\Omega^2)=Q_{32}(\Omega^2)=a_{23}\Omega^2+a_{12}a_{13}-a_{23}a_{11}.$$

Определитель (12) представим в виде

$$D(\Omega^2)=-(\Omega^2-\lambda_1^2)(\Omega^2-\lambda_2^2)(\Omega^2-\lambda_3^2),$$

где $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ – корни кубического относительно Ω^2 уравнения $D(\Omega^2) = 0$, которые следует считать действительными и однократными [11, с. 214]. В соответствии с формулами Виета справедливы соотношения:

$$b_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad b_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2, \quad b_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2. \tag{15}$$

Если (при $m \neq 0$)

$$\gamma = \frac{b_2{}^2}{b_1 b_3} >> 1, \tag{16}$$

то, используя формулы Виета (15), можно показать, что меньший из корней уравнения $D(\Omega^2) = 0$ (пусть это будет λ_3^2) приближенно равен

$$\lambda_3^2 \approx \frac{b_3}{b_2}\left(1 + \frac{1}{\gamma - 2}\right), \tag{17}$$

а два других корня

$$\lambda_{1,2}^2 \approx \frac{1}{2}\left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2 + \frac{2b_2}{\gamma}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} - \lambda_3^2\right). \tag{18}$$

Для достаточно тонких оболочек условие (16) обычно всегда выполняется. При этом формулы (17), (18) для корней λ_r^2 справедливы с хорошим приближением (< 0,1%).

При $\overline{p}^2 + m^2 >> 1$ отсюда следует:

$$\lambda_3^2 \approx a^2\left[(\overline{p}^2 + m^2)^2 - 2m^2 + 1\right] + \frac{(1-\sigma^2)\overline{p}^4}{(\overline{p}^2 + m^2)^2}, \qquad a^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \tag{19}$$

$$\lambda_1^2 \approx \overline{p}^2 + m^2 + 1 - \frac{\lambda_3^2}{2}, \qquad \lambda_2^2 \approx \frac{1-\sigma}{2}(\overline{p}^2 + m^2) - \frac{\lambda_3^2}{2}.$$

Если $a(\overline{p}^2 + m^2) >> 1$, то $\lambda_3 \approx a(\overline{p}^2 + m^2)$.

Разложим правильные несократимые дроби, входящие в формулу (11), на элементарные дроби:

$$\frac{Q_{jl}(\Omega^2)}{D(\Omega^2)} = \sum_{r=1}^{3} \frac{Q_{jl}(\lambda_r^2)}{D'(\lambda_r^2)} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \lambda_r^2}, \tag{20}$$

где

$$D'(\lambda_r^2) = \left.\frac{dD(\Omega^2)}{d\Omega^2}\right|_{\Omega^2 = \lambda_r^2} = -3\lambda_r^4 + 2b_1\lambda_r^2 - b_2. \tag{21}$$

С помощью формул (14) и (21) легко также установить, что

$$-D'(\Omega^2) = Q_{11}(\Omega^2) + Q_{22}(\Omega^2) + Q_{33}(\Omega^2). \tag{22}$$

Подставив выражения (20) и (22) в формулу (11), окончательно найдем:

$$U_j^{pm}(\Omega) = \frac{R^2}{m_1 c_1{}^2} \sum_{l=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} \frac{A_{jlr} P_l^{pm}(\Omega)}{\lambda_r^2 - \Omega^2},\ \text{j = 1,2,3,} \tag{23}$$

где

$$A_{jlr} = A_{jlr}(p, m, \frac{R}{L}, a^2, \sigma) = \frac{Q_{jl}(\lambda_r^2)}{Q_{11}(\lambda_r^2) + Q_{22}(\lambda_r^2) + Q_{33}(\lambda_r^2)}, \qquad \text{p,m = 1,2,…,}\infty. \tag{24}$$

В симметричном случае (при m = 0) будет:

$$U_2 \equiv 0,\ U_1 = U_1(z,t),\ U_3 = U_3(z,t),\ P_2^{p0}(t) = 0\,;$$

согласно формулам (7)

$$a_{12}^0 = a_{21}^0 = a_{23}^0 = a_{32}^0 = 0;$$

$$a_{11}^0 = \overline{p}^2; \quad a_{33}^0 = 1 + a^2(1 + \overline{p}^4); \tag{25}$$

$$a_{13}^0 = a_{31}^0 = -\overline{p}(\sigma + a^2 \overline{p}^2).$$

Формулы (23) можно распространить на осесимметричный случай m = 0, если считать:

$$A_{2lr} = A_{j2r} = A_{jl2} = 0; \quad -A_{131} = A_{133} = -A_{311} = A_{313} = \frac{a_{13}^0}{\lambda_{03}^2 - \lambda_{01}^2}; \tag{26}$$

$$A_{111} = A_{333} = \frac{\lambda_{03}^2 - a_{11}^0}{\lambda_{03}^2 - \lambda_{01}^2}; \quad A_{113} = A_{331} = \frac{\lambda_{03}^2 - a_{33}^0}{\lambda_{03}^2 - \lambda_{01}^2}; \quad \lambda_1^2 = \lambda_{01}^2; \quad \lambda_3^2 = \lambda_{03}^2,$$

где

$$\lambda_{01}^2 = \frac{1}{2}\left(a_{33}^0 + a_{11}^0 - \sqrt{\left(a_{33}^0 - a_{11}^0\right)^2 + \left(2a_{13}^0\right)^2} \right), \tag{27}$$

$$\lambda_{03}{}^2 = \frac{1}{2}\left(a_{33}^0 + a_{11}^0 + \sqrt{\left(a_{33}^0 - a_{11}^0\right)^2 + \left(2a_{13}^0\right)^2} \right).$$

При $\overline{p}^2 << 1$ (L>>R) из формул (27) и (25) следует:

$$\lambda_{01} \approx \overline{p}\sqrt{1-\sigma^2}; \quad \lambda_{03} \approx 1,$$

откуда, учитывая (10) и (4), найдем резонансные частоты осесимметричных колебаний протяженной оболочки:

$$f_1^{p0} = \frac{p c_1 \sqrt{1-\sigma^2}}{2L} = \frac{p}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho_1}}, \tag{28}$$

$$f_3^{p0} = \frac{c_1}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{E}{\rho_1(1-\sigma^2)}}. \tag{29}$$

Частоту, определяемую формулой (29), называют кольцевой, т.к. с ней происходят свободные синфазные радиальные колебания оболочки как кольца. При этом по окружности оболочки укладывается одна длина волны продольных колебаний в пластине. На резонансной частоте f_1^{p0} (28) по длине оболочки укладывается p продольных полуволн в стержне.

Формулы (23) позволяют полностью решить задачу о вынужденных колебаниях свободно опертой по краям оболочки под действием сил, произвольно распределенных по ее поверхности и действующих в произвольных направлениях. Для получения окончательных результатов необходимо по найденным значениям спектральных плотностей $U_j^{pm}(\omega)$ вычислить функции времени $U_j^{pm}(t)$ с помощью преобразования Фурье (8), подставить эти функции в правые части выражений (3) и выполнить суммирование рядов.

2. Эквивалентные резонаторы

Представим формулы (23) в более привычном для акустика виде, перейдя от волновых параметров $\Omega = \omega R / c_1$ к частотам ω и от спектров смещений к спектрам скоростей

$$V_j^{pm}(\omega) = -i\omega U_j^{pm}(\omega).$$

Таким путем из (23) получим:

$$V_j^{pm}(\omega) = \sum_{r=1}^{3} V_{jr}^{pm}(\omega),$$

$$V_{jr}^{pm}(\omega) = \frac{1}{i\omega m_1} \cdot \frac{\frac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2} P_{jr}^{pm}(\omega)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}} = Y(\omega, \omega_{pmr}) P_{jr}^{pm}(\omega), \tag{30}$$

где при $m \neq 0$ в соответствии с соотношением (24)

$$P_{jr}^{pm}(\omega) = \sum_{l=1}^{3} A_{jlr} P_l^{pm}(\omega) = \frac{Q_{j1}(\lambda_r^2) P_1^{pm}(\omega) + Q_{j2}(\lambda_r^2) P_2^{pm}(\omega) + Q_{j3}(\lambda_r^2) P_3^{pm}(\omega)}{Q_{11}(\lambda_r^2) + Q_{22}(\lambda_r^2) + Q_{33}(\lambda_r^2)}, \tag{31}$$

при m = 0

$$P_{jr}^{p0}(\omega) = \sum_{l=1}^{3} A_{jlr} P_l^{p0}(\omega),$$

а величины A_{jlr} даются выражениями (26);

$$Y(\omega, \omega_{pmr}) = \frac{1}{i\omega m_1} \cdot \frac{\frac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}} - \tag{32}$$

проводимость сосредоточенного акустического резонатора, представляющего собственное колебание оболочки с резонансной круговой частотой

$$\omega_{pmr} = \frac{\lambda_r(p,m)}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho_1(1-\sigma^2)}}. \tag{33}$$

Например, при $a(\overline{p}^2 + m^2) >> 1$ согласно формул (19) $\lambda_3(p,m) \approx a(\overline{p}^2 + m^2)$ и по формуле (33) найдем собственные частоты квазиизгибных колебаний оболочки

$$f_{pm3} = \frac{(\overline{p}^2 + m^2)h}{2\pi R^2}\sqrt{\frac{E}{12\rho_1(1-\sigma^2)}}. \tag{34}$$

Это совпадает с выражением для собственных частот поперечных колебаний прямоугольной пластинки со сторонами L и πR, свободно опертой по всем краям [14, с. 301]. Плотность собственных частот в этом случае дается асимптотической формулой:

$$\frac{dN(f_{pm3})}{df_{pm3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi RL}{hc_1}. \tag{35}$$

Таким образом, отклик оболочки на произвольные воздействия – это сумма откликов множества независимых акустических резонаторов типа (30), причем каждому сочетанию чисел p и m при m ≠ 0 соответствуют три, а при m = 0 – два резонатора.

Комплексные спектры (30) компонентов колебательной скорости pmr-го резонатора определяют через интеграл Фурье (8) временны́е отклики $V_{jr}^{pm}(t)$ резонатора на произвольные воздействия $P_{jr}^{pm}(t)$. Используя (3), вычислим кинетическую энергию pmr-го резонатора оболочки:

$$T_{pmr}(t) = \frac{m_1 R}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left\{\left[V_{1r}^{pm}(t)\right]^2\cos^2\frac{\overline{p}z}{R}\cos^2 m\varphi + \left[V_{2r}^{pm}(t)\right]^2\sin^2\frac{\overline{p}z}{R}\sin^2 m\varphi + \right. \tag{36}$$

$$\left.\left[V_{3r}^{pm}(t)\right]^2\sin^2\frac{\overline{p}z}{R}\cos^2 m\varphi\ \right\}dzd\varphi = \frac{M}{4\varepsilon_m}\sum_{j=1}^{3}\left[V_{jr}^{pm}(t)\right]^2,$$

где

$$\text{M} = 2\pi \text{RLm}_1 - \tag{37}$$

масса оболочки, кг.

Средняя по времени кинетическая энергия резонатора равна по определению

$$\overline{T_{pmr}(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T T_{pmr}(t)dt = \frac{M}{4\varepsilon_m}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\sum_{j=1}^{3}\left[V_{jr}^{pm}(t)\right]^2\right\}dt. \tag{38}$$

3. Точечные силы

Рассмотрим случай, когда на оболочку действуют N_k зависящих от времени сил, приложенных в произвольных точках (z_k,φ_k):

$$\vec{F}_k(t) = F_k(t)\left(\cos\gamma_{1k}\cdot\vec{e}_1 + \cos\gamma_{2k}\cdot\vec{e}_2 + \cos\gamma_{3k}\cdot\vec{e}_3\right), \tag{39}$$

где cos γ_{jk} – направляющие косинусы вектора k-ой силы; $\vec{e}_1 = \vec{e}_z$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_\rho$ – орты по координатным осям. В этом случае

$$P_j(z,\varphi,t) = \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N_k}F_k(t)\cos\gamma_{jk}\delta(z-z_k)\delta(\varphi-\varphi_k), \tag{40}$$

где δ – символ δ – функции. Подставив эти выражения в формулы (5) и найдя функции $P_j^{pm}(t)$, используем их для вычисления с помощью преобразования Фурье (8) спектров $P_j^{pm}(\omega)$ этих функций. Последнее сведется к вычислению спектров функций $F_k(t)$

$$F_k(\omega) = \int_0^\infty F_k(t) e^{i\omega t} dt. \tag{41}$$

Теперь представим, что силы $F_k(t) \geq 0$ – это весьма короткие импульсы произвольной формы и малой длительности τ_k, такой, что $\omega\tau_k \ll 1$, т. е. имеет место ударное возбуждение оболочки. В этом случае из (41) получим

$$F_k(\omega) \approx \int_0^{\tau_k} F_k(t) dt = I_k, \tag{42}$$

где I_k, Н·с – импульс силы $F_k(t)$, Н. Такой процесс напоминает залп бомбардировки тела молекулами газа. Найденные спектры $P_j^{pm}(\omega)$ подставим в формулу (31) и далее в (30), чтобы получить спектры $V_{jr}^{pm}(\omega)$ компонентов колебательной скорости pmr-го резонатора, а по ним найти и сами временны́е отклики $V_{jr}^{pm}(t)$ этого резонатора. При этом придется вычислить интеграл [15, с. 421, 10]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\omega e^{-i\omega t}}{\omega_{pmr}^2 - \omega^2} d\omega = -2\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{\omega_{pmr}^2 - \omega^2} d\omega = \pi \cos \omega_{pmr} t. \tag{43}$$

Используя результаты (42), (43), окончательно получим:

$$V_{jr}^{pm}(t) = \frac{\varepsilon_m \cos \omega_{pmr} t}{M \sum_{i=1}^{3} Q_{ii}(\lambda_r^2)} \sum_{k=1}^{N_k} I_k \left\{ Q_{j1}(\lambda_r^2) \cos \gamma_{1k} \cos \frac{\bar{p} z_k}{R} \cos m\varphi_k + \right.$$

$$\left. + Q_{j2}(\lambda_r^2) \cos \gamma_{2k} \sin \frac{\bar{p} z_k}{R} \sin m\varphi_k + Q_{j3}(\lambda_r^2) \cos \gamma_{3k} \sin \frac{\bar{p} z_k}{R} \cos m\varphi_k \right\}. \tag{44}$$

Подставив это в формулу (38), найдем

$$\overline{T_{pmr}(t)} = \frac{\varepsilon_m \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{N_k} I_k \{\ldots\} \right)^2}{8M \left[Q_{11}(\lambda_r^2) + Q_{22}(\lambda_r^2) + Q_{33}(\lambda_r^2) \right]^2}, \tag{45}$$

где фигурная скобка – та же, что и в (44).

Будем считать, что точки приложения сил случайны и равномерно распределены по поверхности оболочки. Усреднение по этим точкам обозначим скобками

$$\langle \ldots \rangle = \frac{1}{2\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \ldots dz_k d\varphi_k. \tag{46}$$

Все направления действия сил считаем равновероятными, что дает среднее значение $\langle \cos^2 \gamma_{jk} \rangle = 1/3$. Проведя такие усреднения в формуле (45), получим:

$$\left\langle \overline{T_{pmr}(t)} \right\rangle = \frac{\varepsilon_m \sum_{k=1}^{N_k} I_k^2}{96M} \sum_{j=1}^{3} \frac{Q_{j1}^2(\lambda_r^2) + Q_{j2}^2(\lambda_r^2) + Q_{j3}^2(\lambda_r^2)}{\left[Q_{11}(\lambda_r^2) + Q_{22}(\lambda_r^2) + Q_{33}(\lambda_r^2)\right]^2}. \qquad (47)$$

Рассмотрим выражение

$$\psi^{pm}(\Omega^2) = \sum_{j=1}^{3} \frac{Q_{j1}^2(\Omega^2) + Q_{j2}^2(\Omega^2) + Q_{j3}^2(\Omega^2)}{\left[Q_{11}(\Omega^2) + Q_{22}(\Omega^2) + Q_{33}(\Omega^2)\right]^2}. \qquad (48)$$

Его можно представить в виде

$$\psi^{pm}(\Omega^2) = 1 + \frac{2J_2(\Omega^2)}{J_1^2(\Omega^2)}, \qquad (49)$$

где

$$J_1 = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}, \qquad (50)$$

$$J_2 = Q_{12}{}^2 + Q_{13}{}^2 + Q_{23}{}^2 - Q_{11}Q_{22} - Q_{11}Q_{33} - Q_{22}Q_{33}.$$

Используя формулы (12) – (14), найдем:

$$Q_{11}(\Omega^2)Q_{22}(\Omega^2) - Q_{12}^2(\Omega^2) = D(\Omega^2)(a_{33} - \Omega^2),$$

$$Q_{11}(\Omega^2)Q_{33}(\Omega^2) - Q_{13}^2(\Omega^2) = D(\Omega^2)(a_{22} - \Omega^2), \qquad (51)$$

$$Q_{22}(\Omega^2)Q_{33}(\Omega^2) - Q_{23}^2(\Omega^2) = D(\Omega^2)(a_{11} - \Omega^2),$$

откуда с учетом выражений (50) и (13) получим:

$$J_2(\Omega^2) = D(\Omega^2)(3\Omega^2 - b_1). \qquad (52)$$

Поскольку значения $\Omega^2 = \lambda_r^2$ являются корнями уравнения $D(\Omega^2) = 0$, то согласно формулам (51), (52) и (49) для всех pmr-резонаторов (при m ≠ 0) справедливы соотношения:

$$Q_{12}^2(\lambda_r^2) = Q_{11}(\lambda_r^2)Q_{22}(\lambda_r^2),$$

$$Q_{13}^2(\lambda_r^2) = Q_{11}(\lambda_r^2)Q_{33}(\lambda_r^2), \qquad (53)$$

$$Q_{23}^2(\lambda_r^2) = Q_{22}(\lambda_r^2)Q_{33}(\lambda_r^2),$$

$$J_2(\lambda_r^2) = 0, \qquad (54)$$

$$\psi^{pm}(\lambda_r^2) = 1. \qquad (55)$$

При m = 0 ($\varepsilon_0 = 1$) соотношение (55) тоже выполняется, поскольку

$$\psi^{p0}(\lambda_r^2) = \sum_{j=1,3}\left(A_{j1r}^2 + A_{j3r}^2\right) = A_{11r}^2 + A_{13r}^2 + A_{31r}^2 + A_{33r}^2$$

и, как легко установить с помощью формул (25) – (27),

$$\psi^{p0}(\lambda_{01}^2) = \psi^{p0}(\lambda_{03}^2) = 1. \qquad (56)$$

Итак, соотношение (55) справедливо для всех резонаторов оболочки, отвечающих любым сочетаниям чисел p = 1, 2, … ∞; m = 0, 1, 2, … ∞; r = 1, 2, 3, т.е. для любых частот и форм собственных колебаний. Оно выполняется независимо от того, какая именно теория оболочек используется, т. к. при выводе (55) не потребовались сведения о конкретном строении коэффициентов $a_{ij}(p,m)$ (10), отражающих особенности симметричной матрицы линейных дифференциальных операторов L_{ij} (2) системы разрешающих уравнений (1) теории оболочек. В сущности, найденные соотношения (53) – (55) – это только свойства решений системы алгебраических уравнений (9) с симметричными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}$ и с правыми частями.

На основании формул (48), (55), (56) из (47) окончательно найдем:

$$\left\langle \overline{T_{pmr}(t)} \right\rangle = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} I_k^2}{48M} = \text{invar}. \tag{57}$$

Таким образом, при залповом ударном возбуждении ограниченной оболочки распределение энергии колебаний равномерно по всем возбужденным степеням свободы. Положение не изменится, если удары будут неодновременны, что легко показать.

Природа волновых степеней свободы такова, что каждая точка оболочки одновременно принадлежит всем резонаторам. Поэтому даже один удар в любом месте оболочки возбуждает сразу все её собственные колебания, но в разной степени: наибольший отклик дадут те из них, для которых место удара совпадет с пучностью колебаний и возбуждения вовсе не случится, если удар придется на узел колебаний. Применение же множественных разнонаправленных и равномерно распределенных по поверхности оболочки ударов дает путем усреднения (46) результат (57). При этом число ударов N_k не обязательно должно быть чрезмерно большим.

Если возбуждение оболочки представляет собой стационарный случайный процесс, то средняя энергия резонатора (38) не зависит от времени и в силу теоремы А.Я. Хинчина [16, с.164]

$$\overline{T_{pmr}(t)} = \frac{\pi m_1 RL}{2\varepsilon_m} \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=1}^{3} G_{Vjr}^{pm}(\omega) \right\} d\omega. \tag{58}$$

где $G_{Vjr}^{pm}(\omega)$, м^2/с – энергетический спектр процесса $V_{jr}^{pm}(t)$, м/с.

Энергетические спектры откликов $G_{Vjr}^{pm}(\omega)$ и возбуждающих резонатор сил $G_{Pjr}^{pm}(\omega)$ связаны известным соотношением [17, с.374]:

$$G_{Vjr}^{pm}(\omega) = \left| Y(\omega, \omega_{pmr}) \right|^2 G_{Pjr}^{pm}(\omega). \tag{59}$$

Здесь (в отличие от (32)) учтем диссипацию механической энергии в материале оболочки, задав модуль Юнга в комплексном виде $E(1 - i\eta)$, где $\eta = \eta(\omega)$ – коэффициент внутренних потерь, который в силу принципа причинности [18] должен быть нечетной функцией частоты, т. е.

$$\eta(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{pmr}} \delta(\omega), \quad \delta(-\omega) = \delta(\omega) << 1.$$

Поэтому

$$Y(\omega,\omega_{pmr}) = \frac{1}{i\omega m_1}\cdot\frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}-i\dfrac{\omega}{\omega_{pmr}}\delta(\omega)}. \quad (60)$$

Подставив выражения (59) и (60) в формулу (58), найдем:

$$\overline{T_{pmr}(t)} = \frac{\pi RL}{2\varepsilon_m m_1\omega_{pmr}^2}\int_0^\infty \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}\right)^2+\dfrac{\omega^2}{\omega_{pmr}^2}\delta^2(\omega)}\left\{\sum_{j=1}^{3}G_{Pjr}^{pm}(\omega)\right\}d\omega. \quad (61)$$

Если процесс $P_{jr}^{pm}(t)$ широкополосен в сравнении с резонатором, то в (61) можно вынести из-под знака интеграла спектральную плотность. Тогда, считая, что наблюдение ведется в охватывающей собственную частоту резонатора ω_{pmr} полосе частот $\Delta\omega$ с центральной частотой $\omega_0 \approx \omega_{pmr}$, достаточно узкой по сравнению с шириной спектра воздействия, но намного превышающей ширину резонансной кривой, и учитывая, что [15, с. 312, 3.257]

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2+x^2\delta^2}dx = \frac{\pi}{2\delta},$$

найдем:

$$\overline{T_{pmr}(\Delta\omega,t)} = \frac{\pi^2 RL\sum_{j=1}^{3}\overline{\left[P_{jr}^{pm}(\Delta\omega,t)\right]^2}}{4\varepsilon_m m_1\omega_0^2\delta(\omega_0)\beta}, \quad (62)$$

где $\beta = \Delta\omega/\omega_0$ – относительная ширина частотной полосы наблюдения.

Отсюда видно, что все сводится к вычислению суммы средних квадратов компонентов возбуждающих резонатор сил, пропущенных через полосовой фильтр $\Delta\omega$.

Силами, возбуждающими pmr-й резонатор, являются в согласии с (30) функции времени $P_{jr}^{pm}(t)$, получающиеся обращением по Фурье соотношений (31). Последние и представят эти функции при замене аргументов ω на t. При этом функции $P_l^{pm}(t)$, входящие в числитель, будут выражаться формулами (5) через силы $P_l(z,\varphi,t)$ (40), непосредственно приложенные к оболочке. Для средних квадратов компонентов возбуждающих резонатор сил найдем

$$\overline{\left[P_{jr}^{pm}(t)\right]^2} = \frac{\varepsilon_m^2}{\pi^2R^2L^2\left[\sum_{i=1}^{3}Q_{ii}(\lambda_r^2)\right]^2}\sum_{k=1}^{N_k}\overline{F_k^2(t)}\Big[Q_{j1}^2(\lambda_r^2)\cos^2\gamma_{1k}\cos^2\frac{\overline{p}z_k}{R}\cos^2 m\varphi_k +$$

$$Q_{j2}^2(\lambda_r^2)\cos^2\gamma_{2k}\sin^2\frac{\overline{p}z_k}{R}\sin^2 m\varphi_k + Q_{j3}^2(\lambda_r^2)\cos^2\gamma_{3k}\sin^2\frac{\overline{p}z_k}{R}\cos^2 m\varphi_k + \quad (63)$$

+ сумма знакопеременных перекрестных членов].

Выполнив подобно предыдущему примеру в формуле (63) усреднение (46) по случайным и равновероятным точкам приложения и направлениям сил (39), а также учитывая результаты (55), (56), найдем:

$$\sum_{j=1}^{3}\left\langle \left[P_{jr}^{pm}(t)\right]^2 \right\rangle = \frac{\varepsilon_m \sum_{k=1}^{N_k} \overline{F_k^2(t)}}{6\pi^2 R^2 L^2}.$$

Подставив это в (62), окончательно получим:

$$\left\langle \overline{T_{pmr}(\Delta\omega, t)} \right\rangle = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} \overline{F_k^2(\Delta\omega, t)}}{24RLm_1\omega_0^2\delta(\omega_0)\beta} = \frac{\pi G_F(\omega_0)}{12M\omega_0\delta(\omega_0)}, \quad (64)$$

где

$$G_F(\omega_0) = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} \overline{F_k^2(\Delta\omega, t)}}{\Delta\omega} -$$

энергетический спектр суммарного силового воздействия на оболочку, ограниченный полосой $\Delta\omega$.

Полоса частот $\Delta\omega$ может быть относительно узкой, т. е. $\beta << 1$. Однако при достаточно высоких частотах в эту полосу попадет множество ΔN собственных частот $\omega_{pmr} \approx \omega$ резонаторов оболочки, отвечающих самым разным наборам чисел p, m, r и представляющих всевозможные формы собственных колебаний оболочки (квазипродольные, крутильные, квазиизгибные). Например, для стальной оболочки размерами $L = \pi R$, $R = 1$м, $h = 0{,}004$ м = 4 мм при $c_1 = 5400$ м/с, $p = m = 40$, $a(p^2 + m^2) = 3{,}7 >> 1$, $\beta = 0{,}1$ по формулам (34), (35) найдем: $f_{pm3} = 3176$ Гц, $\Delta f = 318$ Гц, $\Delta N = 503$. Формула (64) устанавливает равенство средних кинетических энергий всех таких собственных колебаний с близкими частотами и служит, таким образом, доказательством и формулировкой равнораспределения случайных вибраций в оболочках ограниченной длины при стационарном возбуждении. Это можно назвать «равнораспределением в малом», поскольку оно не столь «всеобъемлюще» как (57). Возможно, так происходит из-за того, что при наличии потерь резонаторы уже не вполне взаимонезависимы, между ними происходит обмен энергией и, видимо, имеет место перекачка энергии по спектру в сторону более низкочастотных резонаторов, меньше поглощающих энергию.

Заключение

Доказано прямым расчетом равнораспределение кинетической энергии по всем возбужденным собственным колебаниям любых форм цилиндрической оболочки конечной длины при её ударном возбуждении. Это верно для широкого спектра резонансных частот, ограниченного лишь условием $\omega_{pmr}\tau_k << 1$. При стационарных случайных вибрациях оболочки равнораспределение справедливо для собственных колебаний с близкими частотами независимо от их форм.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. 3-е изд. дополн. М.: Наука, 1976. – 583 с.
2. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Том 1. Теория электромагнитного поля. Теория относительности. Статистическая физика. М.: ГИФМЛ, 1962. – 695 с.
3. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики. М.: Наука, 1973. – 423 с.
4. Фейнман Р., Лейтон Р.,Сэндс *М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып.4. Кинетика. Теплота. Звук. М.: Мир, 1965. – 261 с.
5. Беккер Р. Теория теплоты. / Пер. с нем. М.: Энергия, 1974. – 504 с.
6. Шёпф Х.-Г. От Кирхгофа до Планка. / Пер. с нем. Под ред. Д.Н. Зубарева. М.: Мир, 1981. – 192 с.
7. Дебай П. Избранные труды. Статьи 1909 – 1965. Л.: Наука, 1987. – 559 с.
8. Степанов В.Б., Тартаковский Б.Д. О статистическом методе расчета вибрации сложной конструкции. // Акуст. журн. – 1987. – Т. 33. – № 4. – С.743–750.
9. Степанов В.Б., Тартаковский Б.Д. О статистическом методе оптимизации размещения вибропоглощающего покрытия на сложной конструкции. // Акуст. журн. – 1989. – Т. 35. – № 1. – С. 116–121.
10. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. 2-е изд. испр. и дополн. М.: Наука, 1977. – 552 с.
11. Власов В.В. Избранные труды. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с.
12. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука,1971. – 808 с.
13. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. Учебн. пос. 4-е изд. перераб. и дополн. М.: Сов. радио, 1975. – 320 с.
14. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. / Пер. с англ. Под ред. Л.М. Лямшева. М.: Мир, 1971. – 557 с.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 5-е изд. стереотипное. М.: Наука, 1971. – 1108 с.
16. Харкевич А.А. Спектры и анализ. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1962. – 236 с.
17. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. 2-е изд. перераб. и дополн. М.: Физматгиз, 1976. – 494 с.
18. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. / Пер.с англ. М.: Мир, 1976. – 461 с.